Universität Ulm

Abgabe:
30.10.13, 16:00 Uhr
im H3

Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

42 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Serie 1

1. 1. Man beweise Lemma 1.1.10, d.h., jede σ–Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist abgeschlossen gegenüber den mengentheoretischen Operationen $\bigcap^{\infty}$, $\setminus$ und $\triangle$. [4]

2. Man beweise die in Definition und Satz 1.1.11 enthaltenen Behauptungen:

   (a) Die von einem Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Menge

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{–Algebra} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{S}}} \mathcal{A}$$

   ist eine σ–Algebra. [4]

   (b) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ist die (bezüglich Inklusion) kleinste σ–Algebra, die $\mathcal{S}$ enthält. [2]

2. Man beweise ausführlich Satz 1.1.15 der Vorlesung: $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I})$ ist die von allen offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen erzeugte $\sigma-$Algebra. [10]

3. Man beweise Lemma 1.2.1 der Vorlesung: Sind $I, I_1, \ldots, I_N \in \mathcal{I}$ mit $I_k \cap I_l = \emptyset$ für $k \neq l$ und $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, dann gilt

$$\ell(I) = \sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) .$$

[10]

4. Ein nichtleeres System $\mathcal{A}$, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, von Teilmengen einer Menge X heißt **Algebra**, wenn

(i) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{A}$.

Sei $\overline{\mathcal{I}}$ das System aller beschränkten und unbeschränkten Intervalle im $\mathbb{R}^n$. $\overline{\mathcal{E}}$ bezeichne das Mengensystem aller disjunkten Vereinigungen einer endlichen Anzahl von Intervallen $I \in \overline{\mathcal{I}}$. Man beweise:

1. $\overline{\mathcal{E}}$ ist eine Algebra. [8]
2. Es gilt $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{A}(\mathcal{I})$. [4]