Universität Ulm

Abgabe:
13.11.13, 16:00 Uhr
im H3

Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

42 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Serie 2

1. Seien X, X^* Mengen und $f : X \to X^*$ eine Abbildung. Man zeige:

1. Ist $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ eine σ-Algebra, so ist $\mathcal{A} := \{f^{-1}(A^*) \mid A^* \in \mathcal{A}^*\}$ ebenfalls eine σ-Algebra. [5]
2. Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, so auch $\mathcal{A}^* := \{A^* \in \mathcal{P}(X^*) \mid f^{-1}(A^*) \in \mathcal{A}\}$. [5]

2. Sei X überabzählbar. Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengenfunktionen $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ um äußere Maße oder sogar Maße handelt:

1.
$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
[5]

2.
$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar} \\ 1 & \text{sonst .} \end{cases}$$
[5]

3. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei $T_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $T_{x_0} : x \mapsto x + x_0$ definierte Translation. Man zeige:

1. $\lambda^*(I) = \lambda^*(T_{x_0}(I))$ für alle $I \in \mathcal{I}$. [2]
2. Für jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(T_{x_0}(A))$. Man folgere daraus die Translationsinvarianz von λ^*, d.h. die Beziehung $\lambda^*(A) = \lambda^*(T_{x_0}(A))$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. [4]
3. A ist messbar $\Leftrightarrow$ $T_{x_0}(A)$ ist messbar für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. [4]

4. Sei $A \subset [0, 1]^n$. Dann heißt

$$\lambda_*(A) := 1 - \lambda^*([0, 1]^n \setminus A)$$

das **innere Maß von** A. Man zeige:

1. $\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$ für alle $A \subset [0, 1]^n$. [3]
2. $\lambda_*(A) = \lambda^*(A) \Leftrightarrow A$ ist messbar. [5]
3. $A \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar genau dann, wenn
$$\lambda_*(T_k(A) \cap [0, 1]^n) = \lambda^*(T_k(A) \cap [0, 1,]^n) \text{ für alle } k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n,$$
dabei ist T_k die in Aufgabe 3 definierte Translation. [4]