Universität Ulm

Abgabe:
11.12.13, 16:00 Uhr
im H3

Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

40 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Serie 4

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$. Man beweise:

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$. [3]

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dem Maße nach. [3]
Siehe Aufgabe 3 für die Details zur Definition von "Konvergenz dem Maße nach" bei Definitionsbereichen mit Maß gleich ∞.

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für kein $p \in [1, \infty]$ im $p-$ten Mittel. Dabei sei das $p-$te Mittel von f definiert als

$$\left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in [1, \infty)$$

bzw.

$$\inf\{c > 0 \mid |f| \leq c \text{ f.ü.}\}, \; p = \infty \; .$$

[4]

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die durch

$$\omega(f, x_0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sup_{|x-x_0|<\varepsilon} f(x) - \inf_{|x-x_0|<\varepsilon} f(x) \right)$$

definierte Zahl $\omega(f, x_0) \in [0, +\infty]$ heißt die **lokale Oszillation** von f in x_0. Man zeige:

1. f ist stetig in $x_0 \;\Leftrightarrow\; \omega(f, x_0) \;=\; 0.$ [2]
2. Die Menge $\{x \mid \omega(f, x) \geq \delta\}$ ist für jedes $\delta > 0$ abgeschlossen. [3]
3. Die Menge $S(f)$ aller Unstetigkeitspunkte von f ist eine F_σ-Menge. [2]
4. $\lambda(S(f)) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; f$ ist messbar. [4]

3. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und seien f, g messbare, f.ü. endliche Funktionen bzw. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen messbarer Funktionen auf D. Es gelte

$$\lambda\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k = f, \quad \lambda\text{–}\lim_{k\to\infty} g_k = g \; .$$

Dabei ist $\lambda\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k = f_k$ genau wie in Definition 2.4.5 erklärt, wobei $\lambda(D) < +\infty$ fallen gelassen wird. Man beweise:

1. Es existiere ein $M > 0$ mit $|f_k| \leq M$ f.ü., $|g_k| \leq M$ f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lambda\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k \cdot g_k = f \cdot g.$$

Hinweis: Man benutze die Darstellung [6]

$$f_k g_k = (f_k - f)(g_k - g) + (f_k - f)g + f(g_k - g) + fg \; .$$

Bitte wenden!

2. Es sei $\lambda(D) < +\infty$. Dann gilt

$$\lambda\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k \cdot g_k = f \cdot g.$$

[4]

4. Man zeige, dass die Bedingung $\lambda(D) < +\infty$ im Satz von Egoroff notwendig ist. [9]