## Aufgabe 4

Der Satz von Egoroff besagt, dass für ein meßbares $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(D) < \infty$ und einer Folge meßbarer Funktionen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf $D$ mit

$$\lim_{k \to \infty} f_k = f \quad \text{f.-ü.}$$

und $f: D \to \mathbb{R}$ es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Ausnahmemenge $A \subset D$ mit $\lambda(A) < \varepsilon$ gibt, so dass

$$f_k \to f \quad \text{gleichmäßig auf } D \setminus A.$$

Betrachte nun folgendes Beispiel:

$D := \mathbb{R}$, $f_n := \chi_{[n,\infty)}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion, denn sei $x \in D$ gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > x$, also gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Sei nun $D' \subset D = \mathbb{R}$ mit $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ glm. auf $D'$. Wir zeigen, daß $\lambda(\mathbb{R} \setminus D') = \infty$ gilt, womit ein gültiges Gegenbeispiel gefunden ist.

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit existiert zu $\delta := \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in D'$, $n \geq n_0$

$$\chi_{[n,\infty)}(x) = |f_n(x) - 0| \leq \delta = \frac{1}{2}$$

erfüllt ist.

$\Rightarrow \forall x \in D': x' < n_0$, da für $x \geq n_0$ $f_{n_0}(x) = 1 > \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus D' \supset [n_0, \infty)$

$\Rightarrow \lambda(\mathbb{R} \setminus D') = \infty$.