Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

40 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Serie 7

1. (a) Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathcal{N} := \left\{ N \subset X \;\middle|\; \exists\, \tilde{N} \in \mathcal{A} : N \subset \tilde{N}\ ,\ \mu(\tilde{N}) = 0 \right\}$$

und

$$\hat{\mathcal{A}} := \left\{ A \cup N \;\middle|\; A \in \mathcal{A}\ ,\ N \in \mathcal{N} \right\}.$$

Man beweise:

(i) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ–Algebra und

$$\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A),\ A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N},$$

ist ein wohldefiniertes vollständiges Maß auf $\hat{\mathcal{A}}$ mit $\hat{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu$. [4]

(ii) Sei $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ–Algebra mit $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\tilde{\mathcal{A}}$ mit $\tilde{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu$. Dann ist $\hat{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}\big|_{\hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mu}$. [2]

(b) Man betrachte den Borel-Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda|_{\mathcal{B}})$ und zeige, dass

$$\mathcal{N} = \{ N \subset \mathcal{L} \mid \lambda(N) = 0 \}\ .$$

Hieraus folgere man, dass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda|_{\mathcal{B}})$ ist. [4]

(c) Man beweise:
Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt genau dann μ–f.ü., wenn sie $\hat{\mu}$–f.ü. gilt. [4]

2. (a) Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $(X,\hat{\mathcal{A}},\hat{\mu})$ seine Vervollständigung. Dann definiere für $\hat{\mathcal{A}}$–messbares $f : X \to [0,+\infty]$

$$\int f\, d\mu := \int f\, d\hat{\mu}$$

und für allgemeines $\hat{\mathcal{A}}$–messbares $f = f^+ - f^-$ mit $\int f^+\, d\mu < +\infty$ und $\int f^-\, d\mu < +\infty$ wie üblich

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\ .$$

Man beweise, dass diese Definition konsistent ist mit der Definition des Integrals für $\mathcal{A}$–messbares $f : X \to [0,+\infty]$ bzw. $\mathcal{A}$–integrierbares $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. [4]

(b) Man gebe unter Ausnutzung von Satz 4.2.6 eine weitere Definition, welche nicht explizit auf die Vervollständigung $(X,\hat{\mathcal{A}},\hat{\mu})$ zurückgreift, des Integrals einer $\hat{\mathcal{A}}$–messbaren Funktion $f : X \to [0,+\infty]$ und zeige, dass diese äquivalent zu der Definition in (a) ist. [2]

3. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein $\sigma-$endlicher Maßraum und ν ein bzgl. μ absolut stetiges Maß auf $\mathcal{A}$. Man beweise, dass, falls auch ν $\sigma-$endlich ist, die Dichte f im Satz von Radon-Nikodym $\mu-$f.ü. eindeutig ist (und damit auch $\nu-$f.ü. eindeutig). [10]

4. Seien X eine abstrakte Menge und $\mu_0 : \mathcal{R}_0 \to [0, +\infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathcal{R}_0$. Für $A \subset X$ sei

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) \Big| (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)\}, & \text{falls } \mathcal{U}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases},$$

dabei ist

$$\mathcal{U}(A) := \Big\{ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} | A_k \in \mathcal{R}_0 \text{ für } k \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big\}$$

das System der abzählbaren Überdeckungen von A durch Mengen aus $\mathcal{R}_0$. Man zeige, dass $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß ist. [10]

Hinweis: Man mache sich klar, dass $\emptyset \in \mathcal{R}_0$ gilt.

Bitte auch an die Anmeldung zur Vorleistung denken.