

Aufg. 4

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit
 $\min_{x \in K} f(x) = 1$ und $\max_{x \in K} f(x) = 2$.

Beh. Es existiert eine stetige Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 mit $\overline{f|_K} = F$.

Bew. Definiere die Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in K \\ \frac{\inf_{y \in K} \{f(y) |x-y|\}}{d(x, K)} & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{cases}$$

Es reicht aus zu zeigen, daß F stetig ist.

Wir unterscheiden folgende drei Fälle für die Stetigkeits-
 Untersuchungen in $x \in \mathbb{R}^n$.

- (i) $x \in K$
- (ii) $x \in \text{int } K$
- (iii) $x \in \partial K$.

Zu (i): Stetigkeit von F in x folgt sofort aus der
 Stetigkeit von f .

Zu (ii): Wir bemerken zunächst, daß $d(x, K) > 0$ für
 alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ gilt, da K kompakt und die Betrags-
 funktion stetig ist und somit $\inf_{y \in K} |x-y| = \min_{y \in K} |x-y|$.
 Zeige weiter: $x \mapsto d(x, K)$ ist stetig. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
 O.B.d.A. sei $\varepsilon < d(x, K)$.

Sei $y_0 \in K$ mit

$\min_{y \in K} |x-y| = |x-y_0|$. Dann gilt für $x' \in B_\varepsilon(x) :=$
 $\{z \in \mathbb{R}^n \mid |z-x| < \varepsilon\}$:

$$|x' - y_0| = |x' - x + x - y_0| \leq |x' - x| + |x - y_0|$$

$$< \varepsilon + d(x, K)$$

$$\Rightarrow d(x', K) < d(x, K) + \varepsilon$$

Durch Vertauschen von x und x' folgt ebenso

$$d(x, K) < d(x', K) + \varepsilon$$

Also gilt $|d(x, K) - d(x', K)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$, was zu zeigen war.

Sei also $x \in \overset{\text{offene Menge}}{\mathcal{C}K}$. Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, daß $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \inf_{y \in K} \{f(y) |x - y|\}$, stetig ist.

$$= \min_{y \in K} \{f(y) |x - y|\}$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Sei $y_0 \in K$ mit $h(x) = f(y_0) |x - y_0|$ und $x' \in B_\varepsilon(x)$ beliebig. Dann gilt

$$h(x') \leq f(y_0) |x' - y_0| \leq f(y_0) \{|x' - x| + |x - y_0|\}$$

$$= h(x) + f(y_0) |x' - x| \leq h(x) + 2\varepsilon, \text{ da } 1 \leq f \leq 2$$

Analog zeigt man $h(x) \leq h(x') + 2\varepsilon$

Somit ist die Stetigkeit von h bewiesen.

Zu (iii): Sei $x \in \partial K$. Sei $\varepsilon > 0$. [Bedenke, dass dann $x \in K$, da K kompakt und folglich $f(x) = F(x)$.]

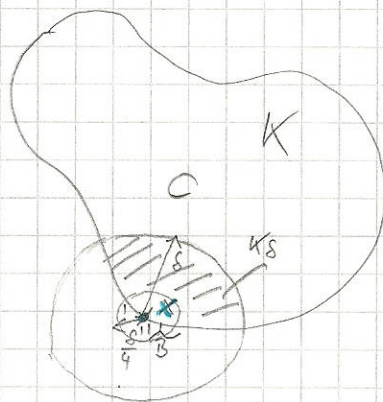
f stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$(*) \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in K \cap B_\delta(x)$$

Zeige nun: $|F(x') - \underbrace{F(x)}_{=f(x)}| \leq \varepsilon \quad \forall x' \in \underbrace{B_{\frac{\delta}{4}}(x)}_{K_\delta := K \cap B_\delta(x)}$

Es genügt aber zu zeigen: $|F(x') - F(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x' \in \tilde{B} := B_{\frac{\delta}{4}}(x) \cap \mathcal{C}K$

Setze $K_\delta := K \cap B_\delta(x)$ und $C := K \setminus K_\delta$



Es gilt für alle $x' \in \tilde{B}$ und alle $y \in C$:

$$|x' - y| \geq |x - y| - |x' - x| \geq \delta - \frac{1}{4}\delta = \frac{3}{4}\delta$$

$$\Rightarrow \inf_{y \in C} \{f(y) |x' - y|\} \geq \frac{3}{4} \quad \forall x' \in \tilde{B}, \text{ da } 1 \leq f$$

Andererseits

$$f(x) |x' - x| \leq 2 \frac{\delta}{4} < \frac{3}{4}\delta, \quad \forall x' \in \tilde{B}, \text{ da } f \leq 2$$

Also gilt

$$(**) \quad \min_{y \in K} f(y) |x' - y| = \min_{y \in K_\delta} \{f(y) |x' - y|\} \quad \forall x' \in \tilde{B}$$

Aus (*) folgt damit f. a. $x' \in \tilde{B}$ $\quad = F(x') \cdot d(x', K)$

$$(f(x) - \varepsilon) \min_{y \in K_\delta} |x' - y| \leq \min_{y \in K_\delta} \{f(y) |x' - y|\} \quad \text{nach (**)}$$

$$\leq (f(x) + \varepsilon) \min_{y \in K_\delta} |x' - y|$$

Bachtet man nun $d(x', K) = \min_{y \in K} |x' - y|$ (dieses nicht man z.B. durch Anwendung von (***) mit $\tilde{f} \equiv 1$), so ergibt eine Division durch $d(x', K)$:

$$F(x) - \varepsilon \leq F(x') \leq F(x) + \varepsilon \quad \forall x' \in \tilde{B}.$$

Insgesamt ist die Höflichkeit von F bewiesen.