

Musterlösung ⁻¹⁻ Probeklausur

1. Aufgabe

- (a) Es gibt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten, 6 Kugeln aus 49 zu ziehen (die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, spielt keine Rolle).

Damit genau 3 Kugeln davon gerade Zahlen aufweisen, müssen also 3 aus den 24 geradzahlig Kugeln (davon gibt es $\binom{24}{3}$ Möglichkeiten) und 3 aus den 25 ungeradzahlig Kugeln (davon gibt es $\binom{25}{3}$ Möglichkeiten) gezogen werden. Damit

$$P(\text{genau 3 "gerade" Kugeln}) = \frac{\binom{24}{3} \cdot \binom{25}{3}}{\binom{49}{6}}.$$

- (b) Zu beachten ist, daß die erste Ziffer nicht 0 sein kann und somit nur die Ziffern 1, 2, ..., 9 in Frage kommen.

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl aller möglichen 7-stelligen Zahlen} \\ &= 9 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl aller 7-stelligen Zahlen, wobei alle 7} \\ &\text{Ziffern paarweise verschieden} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} P(\text{Alle 7 Ziffern verschieden}) &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 10^6} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^6} = \frac{9!}{3! \cdot 10^6} \end{aligned}$$

□

2. Aufgabe

$$(a) \quad 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \sum_{k=1}^n (3k-2)$$

$$\text{Also ist } \sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

zu zeigen.

Beweis mit vollständiger Induktion.

Ind. Afl.

$$n=1$$

$$\sum_{k=1}^1 (3k-2) = 3 \cdot 1 - 2 = 1 = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2} \quad \checkmark$$

Ind. Schluss

Es gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k-2) = \sum_{k=1}^n (3k-2) + 3n+1 \quad \text{Ind. Ann.}$$

$$\frac{n(3n-1)}{2} + 3n+1 = \frac{n(3n-1) + 6n+2}{2}$$

$$= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}$$

⤴ Rückwärts nach-
rechnen durch
Ausmultiplizieren

womit die Aussage für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage

$$\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung

Man kann die obige Summenformel auch wegen $\sum_{k=1}^n (3k-2) = 3 \sum_{k=1}^n k - n \cdot 2$ aus der bekannten Formel für $\sum_{k=1}^n k$ herleiten.

(b) Beweis per ⁻³⁻vollständige Induktion der
Aussage: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt $6 \mid (3^n - 3)$
d.h. 6 teilt $3^n - 3$

Ind. Anf.

Sei $n=1$. Dann ist $3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$

Wegen $0 \cdot 6 = 0$ ist 0 durch 6 teilbar ✓

Ind. Schluss

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $6 \mid (3^n - 3)$. z.z.: $6 \mid (3^{n+1} - 3)$

Es wird zunächst die Differenz $(3^{n+1} - 3) - (3^n - 3)$
betrachtet. Es ist

$$\begin{aligned}(3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) &= 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) \\ &= \underbrace{3^n}_{\in \mathbb{N}} \cdot 6, \text{ womit die Zahl } (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3)\end{aligned}$$

durch 6 teilbar ist.

Weiter ist

$$3^{n+1} - 3 = \underbrace{(3^n - 3)}_{\substack{\text{durch 6} \\ \text{teilbar nach} \\ \text{Ind. Ann.}}} + \underbrace{[(3^{n+1} - 3) - (3^n - 3)]}_{\substack{\text{durch 6 teilbar,} \\ \text{wie oben gesehen}}}$$

Damit ist $3^{n+1} - 3$ als Summe zweier durch 6
teilbarer Zahlen durch 6 teilbar und die Aussage
ist für $n+1$ gezeigt. Insgesamt gilt nach dem
Prinzip der vollst. Ind. $6 \mid (3^n - 3)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

□

3. Aufgabe

$$(a) \quad a_n = \frac{2n^8 - 2n^2 + 1}{(n^4 + 5)^2} = \frac{2n^8 - 2n^2 + 1}{n^8 + 10n^4 + 25}$$

$$= \frac{2 - 2\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^8}}{1 + \frac{10}{n^4} + \frac{25}{n^8}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2$$

da $2 - 2\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^8} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ und $1 + \frac{10}{n^4} + \frac{25}{n^8} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

gilt und sich die Grenzwertregel für Quotienten zweier Folgen anwenden lässt.

Die Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert also gegen 2.

$$(b) \quad b_n = \sqrt{6n^6 + n^3} - \sqrt{6n^6 - n^3 - n}$$

$$= \frac{(\sqrt{6n^6 + n^3} - \sqrt{6n^6 - n^3 - n}) \cdot (\sqrt{6n^6 + n^3} + \sqrt{6n^6 - n^3 - n})}{(\sqrt{6n^6 + n^3} + \sqrt{6n^6 - n^3 - n})}$$

[Der Ausdruck, mit dem erweitert wird, ist ungleich 0]

$$= \frac{6n^6 + n^3 - [6n^6 - n^3 - n]}{\sqrt{4n^6(6 + \frac{1}{n^3})} + \sqrt{4n^6(6 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5})}}$$

$$= \frac{2n^3 + n}{n^3 \left[\sqrt{6 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{6 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}} \right]}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{6 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{6 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

da der Zähler gegen 2 und der Nenner gegen $2\sqrt{6}$ konvergiert.

Die Folge $b_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert also gegen $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$(c) \quad C_n = \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{d_n :=} \cdot \underbrace{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}_{e_n :=} \cdot \underbrace{(-1)^{2n+7}}_{f_n :=}$$

$d_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen $\sin(0) = 0$, da $x \mapsto \sin x$ stetig ist.

$e_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert zwar nicht, da die Werte $-1, 0, 1$ unendlich oft angenommen werden, bleibt aber wegen $|\cos(x)| \leq 1 \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Da $2n+7$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, gilt $f_n = -1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $C_n = \underbrace{d_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{(e_n \cdot f_n)}_{\text{beschränkt}}$ folgt, daß

$C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt.

[Man kann sich sehr leicht mit dem ϵ -Kriterium überzeugen, dass eine Folge, die das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge ist, eine Nullfolge ist.]

□

4. Aufgabe

- | | |
|------------|------------|
| (a) falsch | (i) wahr |
| (b) wahr | (j) falsch |
| (c) falsch | |
| (d) wahr | |
| (e) falsch | |
| (f) wahr | |
| (g) wahr | |
| (h) falsch | |

[Diskussion in den Tutorien]

5. Aufgabe

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

Es werden zunächst die lokalen Extrema gesucht. Setze dann $f'(x) = 0$:

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$0 = (x-3)(x+2)$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3 \notin [-10, 0]$$

$$f''(x) = 2x - 1$$

$$f''(x_1) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0$$

Also ist x_1 ein lokales Maximum

Da f' ein Polynom vom Grad 2 mit positivem führenden Koeffizienten ist und mit $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ als Nullstellen (im Def. bereich $\mathbb{R}$), hat man folgendes

$$f' > 0 \quad \text{für alle } x < -2$$

$$f' < 0 \quad \text{für alle } -2 < x < 3$$

$$f' > 0 \quad \text{für alle } x > 3$$

$\Rightarrow x_1$ ist sogar globales Maximum von f in $[-10, 0]$,

(*) da $f' > 0$ f.a. $x \in [-10, -2)$ und $f' < 0$ f.a. $x \in (-2, 0]$

Nach (*) ist das globale Minimum von f auf $[-10, 0]$

[Nach dem Satz vom Maximum und Minimum für stetige Fktn. existiert ein solches] einer der beiden Rand-

-punkte des Intervalls -10 oder 0.

Einsetzen der Werte ergibt

$$f(-10) = -\frac{1000}{3} - 50 + 60 \leq 0$$

$$f(0) = 0$$

Also ist $x = -10$ globales Minimum der Funktion f auf $[-10, 0]$.

(6)

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 4x + 10$$

g ist als Polynomfunktion differenzierbar und

es gilt

$$g'(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \quad \text{f.ä. } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{weiterhin ist } g'(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 4 = 0$$

Damit existiert ein Polynom h vom Grad 2 mit

$$g'(x) = h(x) \cdot (x+1) \quad \text{f.ä. } x \in \mathbb{R}$$

Polynomdivision ergibt

$$g'(x) : (x+1) =$$

$$(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) : (x+1) = x^2 - 3x - 4$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \\ \hline -3x^2 - 7x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ -4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Dabei gilt } h(x) = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$$

$\Rightarrow$ Die Nullstellen von g' sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$

Da g' ein Polynom vom Grad 3 mit positivem führenden

Koeffizienten ist, folgt $g'(x) < 0$ f.ä. $x < -1$

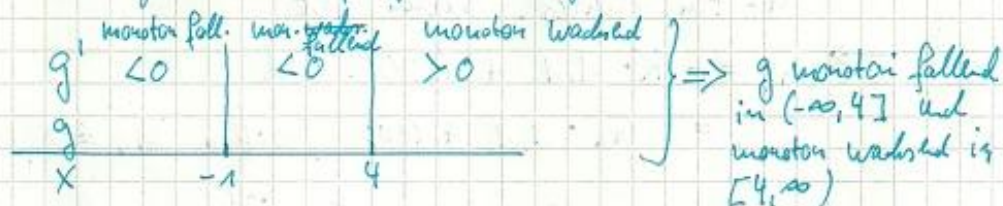
$$g'(x) > 0 \quad \text{f.ä. } x > 4$$

Im Intervall $(-1, 4)$ wechselt g' aufgrund des Zwischenwertsatzes nicht das Vorzeichen.

Da $g'(0) = -4$ gilt, folgt

$$g'(x) < 0 \quad \text{f.ä.} \quad -1 < x < 4$$

Also ergibt sich folgendes Diagramm



Wegen $g'(x) < 0$ für $x \in (-1, 4)$ und $g'(x) > 0$ für $x > 4$ ist $x_2 = 4$ lokales Minimum von g .

Wegen $g'(x) < 0$ für $x < -1$ und $g'(x) < 0$ für $x \in (-1, 4)$ ist $x_1 = -1$ kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt von g . Da $g'(x) = 0$ notwendige Bedingung dafür ist, daß x lokales Extremum ist, gibt es auch keine weiteren lokalen Extrema.

□

6. Aufgabe

- (a) Da der Jahreszins 3,6% beträgt, wird Kapital im ersten Dritteljahr mit 1,2% verzinst. Es gibt insgesamt $9 \cdot 3 = 27$ Verzinsungsperioden.

Damit beträgt das Kapital am 31.12.2020

$$K = \sum_{k=1}^{27} 700 \cdot (1,012)^k = 700 \left[\frac{1 - (1,012)^{28}}{1 - 1,012} - 1 \right]$$

- (b) Kredit der Höhe K , $K > 0$
 Jahreszins = 10%
 Laufzeit = 10 Jahre

Sei G_n , $n \in \mathbb{N}$, das Guthaben am Ende des n -ten Jahres. Dann gilt

$$\begin{aligned} G_1 &= -K \cdot 1,1 + 1000 \text{ und} \\ G_{n+1} &= G_n \cdot 1,1 + 1000, \text{ sofern } G_n \leq 0 \end{aligned}$$

Beh.: $G_n = -K \cdot 1,1^n + \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot 1,1^k$ mit $R = 1000$

Beweis per vollst. Induktion:

$n=1$ klar

Ind. Schluss.

Es gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n \cdot 1,1 + 1000 = \left[-K \cdot 1,1^n + \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot 1,1^k \right] \cdot 1,1 + R \\ &= -K \cdot 1,1^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot 1,1^{k+1} + R \\ &= -K \cdot 1,1^{n+1} + \sum_{k=0}^n R \cdot 1,1^k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also ist obige Behauptung richtig für alle $n \in \mathbb{N}$

Damit die Kreditforderungen am Ende des 10. Jahres beglichen sind, muss $G_{10} \geq 0$ gelten. Der Grenzfall für K erhält man für $G_{10} = 0$. Setze also $G_{10} = 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= -K \cdot 1,1^{10} + \sum_{k=0}^{10-1} R \cdot 1,1^k = -K \cdot 1,1^{10} + R \cdot \frac{1-1,1^{10}}{1-1,1} \\ \Rightarrow K &= R \cdot \frac{1-1,1^{10}}{1-1,1} \cdot 1,1^{-10} \approx 6144,57 \end{aligned}$$

□

7. Aufgabe

- (a) $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2+1}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definierbar und dort differenzierbar, da Entsprechendes für $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto -x^2+1$ gilt. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)' \cdot e^{-x^2+1} + \cos x \cdot (e^{-x^2+1})' \\ &= -\sin x \cdot e^{-x^2+1} + \cos x \cdot e^{-x^2+1} \cdot (-2x) \\ &= e^{-x^2+1} [-\sin x - 2x \cdot \cos x] \end{aligned}$$

- (b) $f(x) = \ln(\ln x)$ ist für $x > 1$ definierbar und differenzierbar. Es gilt unter Anwendung der Kettenregel f.a. $x > 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(\ln x))' = \ln'(\ln x) \cdot \ln'(x) \\ &= \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x} \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^4)}}{x-2}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ ist für alle $x > 0$ differenzierbar. Wegen $\exp(x) > 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt{\exp(x^4)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ diff'bar. Insgesamt ist f damit in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierbar und differenzierbar. Es gilt $f'(x) = \frac{(\sqrt{\exp(x^4)})' \cdot (x-2) - \sqrt{\exp(x^4)} \cdot 1}{(x-2)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2} (\exp(x^4))^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(x^4) \cdot 4x^3 \cdot (x-2) - \sqrt{\exp(x^4)}}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^3 \cdot \sqrt{\exp(x^4)} \cdot (x-2) - \sqrt{\exp(x^4)}}{(x-2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\exp(x^4)} [2x^3 - 1]}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

-11-

$$(d) \quad f(x) = (1+x^2)^{\sin(x)} = e^{\ln(1+x^2)^{\sin(x)}} \\ = e^{\sin(x) \cdot \ln(1+x^2)}$$

Da $x \mapsto 1+x^2$ nur positive Werte annimmt, sind die Teilfunktionen, aus denen sich f zusammensetzt, überall definiert und differenzierbar, somit auch f . Weiter gilt

$$f'(x) = e^{\sin(x) \cdot \ln(1+x^2)} \cdot (\sin(x) \cdot \ln(1+x^2))' \\ = (1+x^2)^{\sin(x)} \cdot [\cos(x) \cdot \ln(1+x^2) + \underbrace{\sin(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}_{= \frac{2x}{1+x^2}}] \quad \square$$