Musterlösung Serie 10

Aufg. 1

(a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ ist $\cos x \neq 0$ und $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos}$ somit differenzierbar für solche x, da $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos$ differenzierbar sind.
Anwenden der Quotientenregel ergibt:

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \text{f.a.}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$, damit insbesondere für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da $\tan'(x) > 0$ f.a. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt, ist $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ injektiv.

Weiter gilt $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0^+$ (d.h. man nähert sich der 0 von rechts beliebig nahe)

gilt $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$

Analog gilt $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1$

$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \cos x = 0^+$

und damit $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$

Da $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ stetig ist, lässt sich der Zwischenwertsatz (bzw. eine Folgerung des letzteren) anwenden und man erhält die Surjektivität von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion bzw. dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion existiert die Umkehrfunktion der Tangensfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ und es gilt}$$

(*) $$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\underbrace{\tan^{-1}}_{=\arctan}(y))} \quad \text{f.a. } y \in \mathbb{R}$$

(b) Wie eben gesehen, ist

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

(**) $$= 1 + \tan^2 x \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(c) Einsetzen von (**) in (*) liefert

$$\arctan'(y) = \frac{1}{(1+\tan^2)(\arctan(y))}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1}(y))}$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \quad \text{f.a. } y \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Aufgabe 2

(a) $K(x) = \frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{4} + 8x + 250$

$K'(x) = \frac{x}{10} x^2 - \frac{1}{2} x + 8$ Grenzkostenfunktion

$U(x) = 99x$

$U'(x) = 99$ Grenzumsatzfunktion

(b) $G(x) = U(x) - K(x) = -\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{4} + 91x - 250$

$G'(x) = -\frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}x + 91$ Grenzgewinnfunktion

Zum Bestimmen der Bereiche mit $G'(x) > 0$ bzw. $G'(x) < 0$ setzt man $G'(x) = 0$:

$$0 = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}x + 91$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = x^2 - 5x - 910$$

also $x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 910}$

$x_1 \approx -27{,}77$

$x_2 \approx 32{,}77$

und $G(x_1) \approx -1870$

$G(x_2) \approx 1827$

Damit

G'	<0	>0	<0
G	-1870		1827
x	$-27{,}77$		$32{,}77$

Aus $G'(x) > 0$ f.a. $x \in (x_1, x_2)$ und $G'(x) < 0$ f.a. $x > x_2$ folgt, daß x_2 lokales Maximum von G ist. Wegen $G'(x) > 0$ f.a. $x \in [0, x_2)$ folgt damit insgesamt sogar, daß x_2 globales Maximum von G im praktisch sinnvollen Defbereich $[0, \infty)$ ist. Damit ist für $x = x_2$ die Produktionsmenge maximal. [Läßt man nur ganzzahlige Werte für x zu, so muss man $G(32)$ mit $G(33)$ vergleichen: $G(32) = 1825\frac{11}{15}$, $G(33) = 1827{,}35$ $\Rightarrow$ Die Prod'menge wird für $x = 33$ maximal.]

(c) Liegt eine stetige Funktion f vor, so besagt der Zwischenwertsatz, dass für jedes Intervall $[a,b]$, $a<b$, unter der Bedingung ($f(a)<0$ und $f(b)>0$) oder ($f(a)>0$ und $f(b)<0$) eine Nullstelle von f in (a,b) existiert.

Dieses wenden wir auf die stetige Funktion $G(x) = -\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{4} + 91x - 250$ und das Intervall $J_0 := [0,8]$ an:

$G(0) = -250$, $G(8) > 0$ [ausrechnen!]

Ausrechnen von $G(4)$ ergibt $G(4) > 0$

Betrachte also das Intervall $[0,4]$.

Ausrechnen von $G(2)$ ergibt $G(2) < 0$

Betrachte also das Intervall $[2,4]$.

Ausrechnen von $G(3)$ ergibt $G(3) > 0$

Wegen $G(2) < 0$ und $G(3) > 0$ existiert ein $x_0 \in (2,3)$ mit $G(x_0) = 0$, so dass das Intervall $(2,3)$ das gewünschte liefert. Da G im Intervall $[0, x_2)$, $x_2 \approx 32{,}77$ streng monoton wächst, gibt es keine kleinere positive Nullstelle von G als x_0. $\square$

3. Aufgabe

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7$

f ist offenbar als Polynomfunktion überall differenzierbar und es gilt $f'(x) = 15x^4 + 15x^2$, also ist $f'(x) > 0$ f.a. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f'(0) = 0$, damit ist f streng monoton wachsend, da die Ableitung in nur einem einzigen Punkt gleich 0 ist und sonst > 0

[vgl. Beispiel $x \mapsto x^3$ aus der Vorlesung]. Also ist f injektiv. Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ folgt aus einer Folgerung aus dem Zwischenwertsatz, daß f surjektiv ist.

(b) $g(x) = x^n \cdot \exp(-x)$, $n \in \mathbb{N}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

g ist als Produkt zweier diff'barer Funktionen wieder differenzierbar und es gilt mit der Produktregel $g'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} = e^{-x}[n \cdot x^{n-1} - x^n]$

$$= e^{-x} x^{n-1} [n - x]$$

Da $e^y > 0$ f.a. $y \in \mathbb{R}$ gilt, sind $x_1 = 0$ und $x_2 = n$ die einzigen Nullstellen von g'. Offenbar gilt im Fall "n ungerade" [dann ist $n-1$ gerade]

$g'(x) > 0$ f.a. $x < x_1 = 0$

$g'(x) > 0$ für $x_1 < x < x_2 = n$

$g'(x) < 0$ für $x > x_2$

$\Rightarrow$ x_2 ist lokales Maximum

und im Fall "n gerade"

$g'(x) < 0$ für $x < x_1$

$g'(x) > 0$ für $x_1 < x < x_2$

$g'(x) < 0$ für $x > x_2$

$\Rightarrow$ x_2 ist lokales Maximum

In beiden Fällen nimmt die Ableitung von g unterschiedliche Vorzeichen an, womit g nicht injektiv ist.

g ist auch nicht surjektiv, da

<u>Fall "n ungerade":</u> Wegen $g'(x) > 0$ f.a. $x < x_2$ und $g'(x) < 0$ f.a. $x > x_2$ ist x_2 sogar globales Maximum von g, so dass Werte größer als $g(x_2)$ nicht angenommen werden.

Fall "n gerade":

In dem Fall gilt $x^n \geq 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ und $e^{-x} \geq 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ und damit $g(x) \geq 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$, so daß g keine negativen Werte annimmt.

Sei nun n gerade. Wähle $B := [0, \infty)$. Dann ist $g : \mathbb{R} \to B$ surjektiv, denn:

(*) $g(0) = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$, so dass mit einer Folgerung des Zwischenwertsatzes folgt: F.a. $y \in B$ ex. $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = y$. Wegen $g(x) \geq 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ gilt auch $g(x) \in B$ f.a. $x \in \mathbb{R}$.

Wähle $D := (-\infty, 0]$. Wegen $g'(x) < 0$ f.a. $x \in (-\infty, 0)$ und $g'(0) = 0$ ist $g : D \to \mathbb{R}$ injektiv. Mit dem Argument (*) folgt $g(D) = [0, \infty)$.

(c) $$h(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} & x < \frac{\pi}{6} \\ \cos x & \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \\ -\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} & x > \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Zunächst wird gezeigt, dass h stetig ist.
Definiere dazu $h_1(x) := -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
$h_2(x) := -\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

Da $h_1, h_2, \cos$ stetige Funktionen sind, genügt es, sich davon zu überzeugen, dass $h_1(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6})$ und $h_2(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6})$ gilt [Dieses gilt mit $h_1(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6})$ und $h_2(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{5\pi}{6})$].

Nun ist

$h_1'(x) = -\frac{1}{2}$ f.a. $x \in \mathbb{R}$
$\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ f.a. $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, $\cos'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos'(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$
$h_2'(x) = -\frac{1}{2}$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

so dass h sogar auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $h'(x) < 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$. Damit ist h injektiv.
Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h_1(x) = \infty$ und

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} h_2(x) = -\infty \quad \text{folgt}$$

mit der Stetigkeit von h, dass h surjektiv ist.

4. Aufgabe

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 1$
f ist als Polynomfunktion in allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = -12x^2 + 24x = 12x[-x+2]$
Damit sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ die einzigen Nullstellen von f'. Da der führende Koeffizient von f' (d.h. die Zahl vor dem x^2) negativ ist, erhält man folgendes Diagramm

f'	<0		>0		<0
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
x		0		2	
		Minimum (lokales)		Maximum (lokales)	

Wegen $f'(x) < 0$ für $x < x_1$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (x_1, x_2)$ ist $x_1 = 0$ lokales Minimum von f. Wegen $f'(x) > 0$ f.a. $x \in (x_1, x_2)$ und $f'(x) < 0$ f.a. $x > x_2$ ist $x_2 = 2$ lokales Maximum von f.

Als kubisches Polynom mit negativem führenden Koeffizienten gilt nach Vorlesung:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

(b) $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 \cdot \exp(\frac{1}{x})$

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ erklärt und dort differenzierbar und damit auch die Verkettung $\exp \circ (\frac{1}{x})$ und insgesamt ist damit g in allen $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = 3x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} - x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$
$$= e^{\frac{1}{x}} \cdot x[3x - 1]$$

(*) Damit ist $x_0 = \frac{1}{3}$ die einzige Nullstelle von g' und es gilt

$g'(x) > 0$ f.a. $x < 0$

$\left.\begin{array}{ll} g'(x) < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{3} \\ g'(x) > 0 & \text{für } x > \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (**) x_0 ist lokales Minimum von g

Da g in allen Punkten des Definitionsbereiches differenzierbar ist, folgt mit (*) und (**), daß x_0 das einzige lokale Extremum ist.

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(\frac{1}{x}) = e^0 = 1$ folgt $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Analog ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(\frac{1}{x}) = e^0 = 1$ und damit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

$a := 0$ ist Definitionslücke von g. Wir untersuchen nun, ob die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\nearrow 0} g(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)$ existieren und bestimmen gegebenenfalls ihre Werte.

Es gilt $\lim\limits_{x \nearrow 0} x^3 = 0$ und $\lim\limits_{x \nearrow 0} \exp(\frac{1}{x}) = 0$, da

$\lim\limits_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$ gilt.

Damit gilt $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} x^3 \cdot \lim\limits_{x \nearrow 0} \exp(\frac{1}{x}) = 0 \cdot 0 = 0$.

Der Fall "$x \searrow 0$" ist schwerer, da $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^3 = 0$ und

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \exp(\frac{1}{x}) = \infty$ $\left[\text{wegen } \lim\limits_{y \to \infty} \exp(y) = \infty\right]$ gilt

und somit die Situation "$0 \cdot \infty$" vorliegt.

Für $x > 0$ gilt

$$e^{\frac{1}{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \geq \frac{x^{-4}}{4!} > 0$$

und damit $x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}} \geq x^3 \cdot \frac{x^{-4}}{4!} = \frac{1}{4!\,x} \xrightarrow{x \searrow 0} \infty$.

Also gilt $\lim\limits_{x \searrow 0} x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

$\square$