Musterlösung Serie 11

1. Aufgabe

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2}$

$f'''(x) = 4x \cdot e^{-x^2} + 8x \cdot e^{-x^2} - 8x^3 \cdot e^{-x^2}$

$= 12x \cdot e^{-x^2} - 8x^3 \cdot e^{-x^2}$

(b) $g(x) = \cos(x) \cdot e^{-x}$

g ist differenzierbar, da $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto e^{-x}$ differenzierbar ist. Weiter gilt

$g'(x) = -\sin x \cdot e^{-x} - \cos x \cdot e^{-x}$

$g''(x) = -\cos x \cdot e^{-x} + \sin x \cdot e^{-x} + \sin x \cdot e^{-x} + \cos x \cdot e^{-x}$

$= 2 \sin x \cdot e^{-x}$

$g'''(x) = 2 \cos x \cdot e^{-x} - 2 \sin x \cdot e^{-x}$

$g^{(4)}(x) = -2 \sin x \cdot e^{-x} - 2 \cos x \cdot e^{-x} - 2 \cos x \cdot e^{-x}$

$+ 2 \sin x \cdot e^{-x}$

$= -4 \cos x \cdot e^{-x}$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(c) $h: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{ax+b}$

Beweis der Aussage per vollst. Induktion.

Ind. Anf.

Sei $n = 1$. Einfaches Ableiten von h ergibt

$h^{(1)}(x) = (-1) \cdot \frac{1}{(ax+b)^2} \cdot a = (-1)^1 \frac{a^1 \cdot 1!}{(ax+b)^{1+1}}$ ✓

Ind. Schluss.

Es gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$h^{(n+1)}(x) = \left(h^{(n)}(x)\right)'$$

$$= \left((-1)^n \frac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}\right)' = (-1)^n \cdot (-1) \frac{a^n \cdot a \cdot n! \cdot (n+1)}{(ax+b)^{n+2}}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(ax+b)^{n+2}} \quad ,$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollst. Ind. ist damit

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ gezeigt.}$$

$\square$

2. Aufgabe

(a) Beweis der Aussage per vollständiger Induktion über n

Ind. Anf.

Sei $n=1$. Einfaches Ableiten von fg nach der Produktregel ergibt

$$(fg)^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) \cdot g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x) \cdot g^{(1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(1-k)}(x) \qquad \checkmark$$

Ind. Schluss.

Es gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \left((fg)^{(n)}(x)\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

$$= f g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)\, g^{(n+1-k)}$$

$$+ f^{(n+1)}(x)\, g(x)$$

$$= f(x)\, g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(k)}(x)\, g^{(n+1-k)}(x)$$

$$+ f^{(n+1)}(x)\, g(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n+1-k)}(x) \quad ,$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt damit f.a. $n \in \mathbb{N}$

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) \quad .$$

(b) Die Funktionen $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto e^x$ sind beliebig oft differenzierbar und es gilt nach Teil (a):

$$\left(x^3 \cdot e^x\right)^{(2011)} = \sum_{k=0}^{2011} \binom{2011}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(2011-k)}$$

$$= \binom{2011}{0} x^3 \cdot e^x + \binom{2011}{1} 3x^2 \cdot e^x + \binom{2011}{2} \cdot 6x \cdot e^x$$

$$+ \binom{2011}{3} \cdot 6 \cdot e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x + \overbrace{2011 \cdot 3}^{=6033} \cdot x^2 \cdot e^x + 2011 \cdot 2010 \cdot 3\, x \cdot e^x$$

$$+ 2011 \cdot 2010 \cdot 2009 \cdot e^x$$

[Alle Ableitungen der Ordnung ≥ 4 von $x \mapsto x^3$ sind identisch 0] $\square$

3. Aufgabe

(a) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad , \; x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}$

Für die erste Ableitung gilt:

$$p^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1},$$

für die zweite Ableitung erhält man

$$p^{(2)}(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot x^{k-2}$$

Man kann nun per vollständiger Induktion zeigen, daß

$$(*) \quad p^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)\, x^{k-i}$$

für $i \in \{\cancel{0}, 1, \ldots, n\}$ gilt.

Ind. Anf.

Sei $i = 1$. Dann ist $k - i + 1 = k - 1 + 1 = k$ und damit $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1) = k$. Also ist

$$p^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=i}^{n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)\, x^{k-i} \checkmark$$

Ind. Schluss.

Sei die Aussage für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ richtig. Es gilt dann

$$p^{(i+1)}(x) = \left(p^{(i)}(x)\right)' = \left(\sum_{k=i}^{n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1)\, x^{k-i}\right)'$$

$$= \sum_{k=i+1}^{n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1) \cdot (k-i)\, x^{k-i-1},$$

womit die Aussage für $i+1$ gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt mit (*)

$$p^{(i)}(0) = a_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot (i-i+1)$$
$$= a_i \cdot i!$$

da der Term mit „x^0", d.h. $k=i$, der einzige ist, der nach Einsetzen von $x=0$ nicht gleich 0 wird.

$$\Rightarrow \quad a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}$$

Sei nun $i=0$.

Einsetzen von $x=0$ in p liefert

$p(0) = a_0$

$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{p(0)}{0!}$ [zur Erinnerung: per Konvention ist $0! = 1$]

(b) gegeben sei das Polynom $p(x) = 5(x-1)^5 - 3(x-1)^2 + 7$ $= \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$ mit zu bestimmenden Koeffizienten.

Offenbar ist

$p(0) = -5 - 3 + 7 = -1 \Rightarrow a_0 = -1$

$p'(x) = 25(x-1)^4 - 6(x-1)$, $p'(0) = 25 + 6 = 31$

und $a_1 = 31$

$p''(x) = 100(x-1)^3 - 6$, $p''(0) = -106$ und $a_2 = \frac{-106}{2!} = -53$

$p'''(x) = 300(x-1)^2$, $p'''(0) = 300$ und $a_3 = \frac{300}{3!} = 50$

$p^{(4)}(x) = 600(x-1)$, $p^{(4)}(0) = -600$ und $a_4 = \frac{-600}{4!} = -25$

$p^{(5)}(x) = 600$, $p^{(5)}(0) = 600$ und $a_5 = \frac{600}{5!} = 5$

Damit gilt nach (a)

$p(x) = 5x^5 - 25x^4 + 50x^3 - 53x^2 + 31x - 1$. $\square$

4. Aufgabe

(a) $f(x) = \cos^2(x) = \cos x \cdot \cos x$

$$= \cos x \cdot (\sin x)' \overset{\text{"partielles Integrieren"}}{=} (\cos x \cdot \sin x)' - (\cos x)' \cdot \sin x$$

$$= (\cos x \cdot \sin x)' + \sin^2 x$$

$$= (\cos x \cdot \sin x)' + 1 - \cos^2 x$$

$\Rightarrow$

$$2 \cos^2 x = (\cos x \cdot \sin x + x)' \quad \text{d.h.}$$

$$\cos^2 x = \left(\tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \tfrac{1}{2} x \right)'$$

Also ist $\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{1}{2} x$ Stammfunktion von $\cos^2 x$.

(b) $g(x) = \frac{5}{x} \cdot \ln(2x)$

Der Term $\frac{5}{x}$ ist bis auf eine multiplikative Konstante die "innere" Ableitung von $\ln(2x)$.
Wähle also $G(x) := \frac{5}{2} \cdot [\ln(2x)]^2$
Ableiten von G ergibt
$G'(x) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \ln(2x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{5}{x} \cdot \ln(2x) = g(x)$,
also ist G wirklich Stammfunktion von g.

(c) $h(x) = \dfrac{20x^3 + 20x}{x^4 + 2x^2 + 10} = 5 \cdot \dfrac{4x^3 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 10}$

Der Zähler im Bruch ist die Ableitung der Funktion im Nenner. Wähle also $H(x) := 5 \cdot \ln(x^4 + 2x^2 + 10)$
Dann gilt $H'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 10} \cdot (4x^3 + 4x) = h(x)$.
H ist also Stammfkt. von h.

(d) $j(x) = e^{ax+b}$, $a \neq 0$

Setze $J(x) := \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$. Dann gilt

$J'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} \cdot a = e^{ax+b} = j(x)$

Also ist J Stammfktn. zu j.

"partielles Integrieren"

(e) $$k(x) = x \cdot \ln x = \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right)' - \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right)' - \frac{1}{2}x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2\right)'$$

Also ist $\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2$ Stammfktn. von k. $\square$

5. Aufgabe

(a) Sei $x \in (a, b]$ und definiere
$h(y) := f(y) - g(y)$ f.a. $y \in [a, b]$
Nach Voraussetzung ist $h(a) \geq 0$ und
$h'(y) = f'(y) - g'(y) \geq 0$ f.a. $y \in (a, b)$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x_0 \in (a, x)$ mit

$$h(x) = \underbrace{h(a)}_{\geq 0} + \underbrace{h'(x_0)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{>0} \geq 0$$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq g(x)$

Da $x \in (a, b]$ beliebig gewählt war und per Aufgabenvoraussetzung $f(a) \geq g(a)$ gilt, ist die Behauptung damit gezeigt.

(b) Es wird Teil (a) auf ein Intervall der Form $[1, M]$, $M > 1$, angewendet.
Setze $f(x) := 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) := \ln(x)$, $h(x) := x - 1$ für $x \in [1, \infty)$
Offenbar gilt $f(1) = g(1) = h(1) = 0$.
Weiter sind f, g und h differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = 1$, so daß für alle $x \in (1, M)$ $f'(x) \leq g'(x) \leq h'(x)$ gilt. Nach Teil (a) gilt damit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ f.a. $x \in [1, M]$. Lässt man nun M gegen ∞ laufen, so erhält man

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{f.a. } x \in [1, \infty).$$

$\square$