Musterlösung Serie 12

1. Aufgabe

(a)

(i) $f(x) = 2x^6 - 12x^5 + 30x^4 - 40x^3 + 30x^2 - 12x + 6$

f ist als Polynomfunktion unendlich oft differenzierbar und es gilt

$f'(x) = 12x^5 - 60x^4 + 120x^3 - 120x^2 + 60x - 12$

$f''(x) = 60x^4 - 240x^3 + 360x^2 - 240x + 60$

$f'''(x) = 240x^3 - 720x^2 + 720x - 240$

$f^{(4)}(x) = 720x^2 - 1440x + 720$

$f^{(5)}(x) = 1440x - 1440$

$f^{(6)}(x) = 1440$

Einsetzen von $x_0 = 1$ in die Ableitungen liefert

$f'(1) = 0$

$f''(1) = 0$

$f'''(1) = 0$

$f^{(4)}(1) = 0$

$f^{(5)}(1) = 0$

$f^{(6)}(1) = 1440 > 0$

Da 6 gerade Zahl ist, folgt nach Satz (21.3) der Vorlesung, daß x_0 lokales Minimum ist.

(ii) $g(x) = x^3 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 0$

g ist als Produkt unendlich oft differenzierbarer Funktionen unendlich oft differenzierbar und es gilt

$g'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x}$

$g''(x) = 6x \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} = 6x \cdot e^{-x} - 6x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x}$

$g'''(x) = 6 \cdot e^{-x} - 6x \cdot e^{-x} - 12x \cdot e^{-x} + 6x^2 \cdot e^{-x} + 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x}$

$= 6\cdot e^{-x} - 18x\cdot e^{-x} + 9x^2 - x^3\cdot e^{-x}$

Damit gilt

$g'(0) = 0$, $g''(0) = 0$, $g'''(0) = 6 \neq 0$

Nach Satz (21.3) der Vorlesung liegt damit in $x_0 = 0$ kein Extremum vor.

(b) $h: [1,5] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

h ist beliebig oft differenzierbar, da $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto e^{-x}$ beliebig oft differenzierbar sind. Es gilt

$h'(x) = 2x\cdot e^{-x} - x^2\cdot e^{-x} = e^{-x}[2x - x^2]$

$h''(x) = 2\cdot e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}$

$= 2\cdot e^{-x} - 4x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}$

Damit gilt $h'(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 2$

$h''(2) = 2\cdot e^{-2} - 8\cdot e^{-2} + 4\cdot e^{-2} = -2\cdot e^{-2} < 0$

Damit liegt also in $x_0 = 2$ ein lokales Maximum vor. Da es im Intervall $[1,5]$ keine weiteren kritischen Punkte, d.h. x mit $h'(x) = 0$, gilt, folgt mit einem Satz aus der Vorlesung, daß in $x_0 = 2$ h sein Maximum annimmt und es auch keine weiteren Punkte gibt, in denen das Maximum angenommen wird.

$\square$

2. Aufgabe

C habe die Koordinaten $(x;0)$. Dann gilt für die Entfernung von A zu C

$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + x^2}$ und für die Entfernung von B zu C

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (5-x)^2}$

Die Gesamtlänge $f(x)$ der beiden Straßen beträgt also

$$f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{4 + (5-x)^2}$$

f ist differenzierbar, da die Ausdrücke unter den Wurzeln stets > 0 sind und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} + \frac{1}{2}\frac{2x-10}{\sqrt{4+(5-x)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \frac{x-5}{\sqrt{4+(5-x)^2}} = \frac{x\cdot\sqrt{4+(5-x)^2} + (x-5)\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}\cdot\sqrt{4+(5-x)^2}}$$

Damit gilt

$$f'(x) = 0 \iff x\cdot\sqrt{4+(5-x)^2} + (x-5)\sqrt{9+x^2} = 0$$

$$\iff x\cdot\sqrt{4+(5-x)^2} = (5-x)\sqrt{9+x^2} \qquad (*)$$

keine Äquivalenz!

$$\Rightarrow x^2\left(4+(5-x)^2\right) = (5-x)^2\left(9+x^2\right)$$

$$\iff x^2(4+25-10x+x^2) = (25-10x+x^2)(9+x^2)$$

$$\iff 29x^2 - 10x^3 + x^4 = 225 + 25x^2 - 90x - 10x^3 + 9x^2 + x^4$$

$$\iff -5x^2 + 90x - 225 = 0$$

$$\iff x^2 - 18 + 45 = 0$$

$$\iff (x-3)(x-15) = 0$$

$$\iff x = 3 \text{ oder } x = 15$$

Einsetzen von $x=3$ in $(*)$ ergibt

$$3 \cdot \sqrt{4+2^2} = 3 \cdot \sqrt{8} = \sqrt{72} = 2 \cdot \sqrt{18} = 2 \cdot \sqrt{9+3^2},$$

so daß $x=3$ (*) erfüllt, d.h. $f'(3) = 0$

Setzt man in (*) $x = 15$, so ergibt sich

$$15 \cdot \sqrt{104} = -10 \cdot \sqrt{234}$$, was falsch ist.

$\Rightarrow \quad f'(15) \neq 0$

Die zweite Ableitung von f lautet

$$f''(x) = \frac{\sqrt{9+x^2} - x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2} + \frac{\sqrt{4+(5-x)^2} - (x-5)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4+(5-x)^2}}}{4+(5-x)^2}$$

Einsetzen von $x=3$ ergibt

$$f''(3) \approx 0{,}118 + 0{,}177 \approx 0{,}295 > 0$$

Damit liegt in $x_0 = 3$ ein lokales Minimum vor.
Da f außer $x_0 = 3$ keine weiteren kritischen Punkte besitzt, folgt nach einem Satz aus der Vorlesung:
In $x_0 = 3$ liegt das einzige Minimum von f vor.
[per Definition "global"!]

$\Rightarrow$ Der Bahnhof sollte im Punkt $(3,0)$ gebaut werden.

$\square$

3. Aufgabe

Da das Volumen eines Quaders mit den Kantenlänge a, b, c gleich $V = a \cdot b \cdot c$ ist, gilt für das Volumen des gemäß den Voraussetzungen erhaltenen Quaders

$$V(x) = (300 - 2x) \cdot (480 - 2x) \cdot x$$
$$= 4x^3 - 1560x^2 + 144000x$$

V ist als Funktion in x beliebig oft differenzierbar mit

$$V'(x) = 12x^2 - 3120x + 144000$$
$$V''(x) = 24x - 3120$$

Setze $V'(x) = 0$. Dann ist

$$0 = 12x^2 - 3120x + 144000$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 260x + 12000$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = (x-60)(x-200)$$

Der praktisch sinnvolle Definitionsbereich von V ist $[0, 150]$. In diesem Intervall ist also das Maximum von V zu suchen.

Einsetzen von $x_0 := 60$ in die zweite Ableitung von V ergibt

$$V''(60) = 24 \cdot 60 - 3120 = -1680$$

Es liegt also in $x_0 = 60$ ein lokales Maximum vor. Da es in $[0, 150]$ keine weiteren kritischen Punkte gibt, ~~ist~~ liegt in $x_0 = 60$ das (einzige) Maximum von V.

Zudem ist $V(60) = 60^3 \cdot 4 - 1560 \cdot 60^2 + 144000 \cdot 60$

$= 3888000$ [in mm^3 gemessen].

II

4. Aufgabe

$f: \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(a) Nullstellen

Setze also $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$x_0 := 0$ ist also die einzige Nullstelle von f

Extrema

f ist in allen Punkten des Definitionsbereiches differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

f' ist ebenfalls in $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ differenzierbar mit

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)(x^2-1)\cdot 2 \cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

Setze $f'(x) = 0$.

Dann ist $x^4 - 3x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0$

Damit sind die Nullstellen von f' gleich $x_0 = 0,\ x_1 := -\sqrt{3},\ x_2 := \sqrt{3}$

Einsetzen von x_1 in die 2. Ableitung:

$f''(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$

$\Rightarrow$ In x_1 liegt ein lokales Maximum vor.

Einsetzen von x_2 in die 2. Ableitung:

$f''(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$

$\Rightarrow$ In x_2 liegt ein lokales Minimum vor

Einsetzen von x_0 in die 2. Ableitung:

$f''(0) = 0$

f'' ist in allen Punkten des Def'bereiches von f differenzierbar mit

$$f'''(x) = \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^3 - (2x^3+6x)\cdot 3\cdot (x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}$$

$$= \frac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4}$$

Damit ist

$f'''(x_0) = -6$, so daß nach Satz (21.3) in x_0 kein Extremum, aber nach einem anderen Satz [wegen $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$] ein Wendepunkt vorliegt.

Wendestellen

Eine notwendige Bedingung an ein $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, um Wendestelle zu sein, ist $f''(x)=0$

Sei also $f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x(x^2+3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Also ist $x_0 = 0$ die einzige Wendestelle von f.

(b) Betrachte $f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

Setze $\left.\begin{array}{l} g(x) := 2x^3+6x \\ h(x) := (x^2-1)^3 \end{array}\right\}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

Dabei gilt $g(x) > 0 \iff x > 0$

$g(x) < 0 \iff x < 0$

und

$h(x) > 0 \iff |x| > 1$

$h(x) < 0 \iff |x| < 1$

Damit gilt $f''(x) > 0 \iff (g(x)>0$ und $h(x)>0)$ oder $(g(x)<0$ und $h(x)<0)$

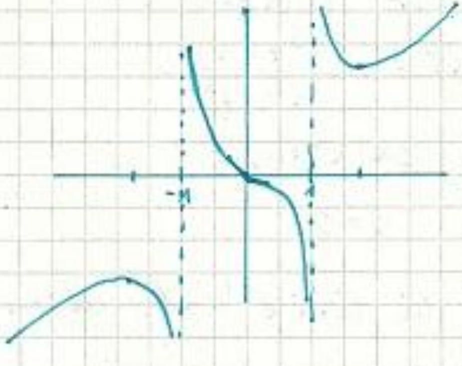
$\iff x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

$f''(x) < 0 \iff (g(x)>0$ und $h(x)<0)$ oder $(g(x)<0$ und $h(x)>0)$

$\iff x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

Also gilt: $(-1,0) \cup (1,\infty)$ ist der Konvexitätsbereich von f,
$(-\infty,-1) \cup (0,1)$ ist der Konkavitätsbereich von f.

(c)



5. Aufgabe

(a) wahr (f' hat keinen weiteren krit. Punkt, wenn für x_0 $f'(x_0)=0$ gilt, so ist x_0 der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel)

(b) wahr (nach einem Satz der Vorlesung ist $f''(x_0)=0$ notwendige Bedingung für eine Wendestelle).

(c) falsch (Betrachte $f(x)=x^4$. Dann ist in $x_0:=0$ $f''(x_0)=0$, x_0 ist aber kein Wendepkt., da wg. $f''(x)=12x^2$ die Fktn. f konvex ist)

(d) wahr (nach Vorlesung ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $f'(x)=2\cdot f(x)$, $f(0)=1$ die Fktn. $f(x)=e^{2x}$)

(e) falsch (Betrachte $f(x)=\arctan x$, $f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, f ist differenzierbar mit $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, beschränkt [da $f(x)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$] besitzt aber wegen $f'(x)>0$ f.a. $x\in\mathbb{R}$ kein Extremum.

(f) wahr (Es gilt das Analogon zu Satz (22.2) der Vorlesung, der die Existenz eines Minimums garantiert)

II