Musterlösung Serie 13

1. Aufgabe

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \cos(ax)}{b \cdot \cos(bx)} = \frac{a}{b},$$

da $x \mapsto \cos x$ stetig und $\cos(0) = 1$

(b) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\cos x \cdot \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{2},$$ da $x \mapsto \sin x$ stetig und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

(c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}} \overset{\lim}{=} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0,$$ da $\alpha > 0$

(d) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^3}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x \cdot e^{-x^2} + 3x^2}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} + 6x}{12x^2} = -\infty,$$

da der Zähler gegen -2 und der Nenner gegen 0^+ konvergiert.

2. Aufgabe

Sei $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 - 7$, $x \in [1,3]$

Offenbar ist $\sqrt[3]{7}$ die einzige Nullstelle von f, da f wegen $f'(x) = 3x^2 \geqq 0$ und "$= 0$" nur für $x = 0$ gilt und f somit injektiv ist [siehe frühere Aufgabenserie].

(a) Zu zeigen ist

(i) f hat eine Nullstelle in $[1,3]$

(ii) $f'(x) \neq 0$ für x in $[1,3]$

(iii) f ist konvex oder konkav

(iv) Der Iterationswert x_1 zu $x_0 = 1$ und zu $x_0 = 3$ liegt in $[1,3]$

zu (i): Dass f eine Nullstelle besitzt, ist klar, da $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ gilt und f stetig ist [Zwischenwertsatz !]. Da $f(1) = 1-7 = -6$ und $f(3) = 27-7 = 20$ gilt, existiert wiederum mit dem ZWS eine Nullstelle von f in $[1,3]$.

zu (ii): Es ist $f'(x) = 3x^2 > 0$ für $x \in [1,3]$

zu (iii): Es ist $f''(x) = 6x > 0$ für $x \in [1,3]$.
Nach einem Satz aus der Vorlesung ist f konvex.

zu (iv): Die Iterationsvorschrift ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 7}{3x_n^2}$$

Damit ist mit $x_0 := 1$

$$x_1 = 1 - \frac{1-7}{3} = 3 \in [1,3]$$

und für $x_0 := 3$

$$x_1 = 3 - \frac{27-7}{27} = 2,\overline{259} \in [1,3]$$

(b) Es wird als Startwert $x_0 := 3$ gewählt.
Nach Satz (23.1) der Vorlesung gilt folgende Fehlerabschätzung

$$|x_n - \sqrt[3]{7}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei $M := \max_{x\in[1,3]} |f''(x)| = 18$

$$m := \min_{x\in[1,3]} |f'(x)| = 3 ,$$

womit $\frac{M}{2m} = 3$

Anwenden der Iterationsvorschrift ergibt

$$x_0 = 3$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2{,}\overline{259}$$
$$x_2 = 1{,}963308018$$
$$x_3 = 1{,}914212754$$
$$x_4 = 1{,}912932041$$
$$x_5 = 1{,}912931183$$

Es gilt nun $|x_5 - x_4| = 8{,}5782 \cdot 10^{-7}$

und damit $|x_5 - \sqrt[3]{7}| \leq 3 \cdot [8{,}5782 \cdot 10^{-7}]^2 \approx 2{,}207 \cdot 10^{-12} < 10^{-10}$.

Wähle also $x_N := x_5$. Wie eben gesehen, erfüllt x_N dann die Fehlerabschätzung.

□

3. Aufgabe

(a) Sei $K: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $K(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$ eine Kostenfunktion mit $k_0, k_1, k_3 > 0$ und $k_2 < 0$. x_1 bezeichne das Minimum der Grenzkostenfunktion $K'(x) = k_1 + 2k_2 x + 3k_3 x^2$. x_1 ist zugleich der Wendepunkt von K und es gilt:

K ist konkav im Bereich $[0, x_1)$ und

K ist konvex im Bereich (x_1, ∞). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$x_1 = -\frac{1}{3}\frac{k_2}{k_3} \; [>0 \text{ wegen } k_2 < 0, k_3 > 0] \text{ gilt.}$$

Damit ist also

(*) K konkav im Bereich $[0, -\frac{1}{3}\frac{k_2}{k_3})$,
K konvex im Bereich $(-\frac{1}{3}\frac{k_2}{k_3}, \infty)$.

x_3 sei das eindeutige Minimum der variablen Durchschnittskosten $D_V = \frac{K(x)-K(0)}{x} = k_1 + k_2 x + k_3 x^2$.

[Der Graph von D_V ist eine nach oben geöffnete Parabel, somit ist der Scheitelpunkt lokales und globales Minimum. Es gibt insbesondere keine weiteren Punkte, in denen die Ableitung gleich 0 ist.]

Da x_3 lokales Minimum von D_V ist und D_V differenzierbar ist, gilt

$$D_V'(x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k_2 + 2 k_3 x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 = -\frac{k_2}{2 k_3} > 0$$

Es ist also $x_3 = \frac{1}{2} \left| \frac{k_2}{k_3} \right| > \frac{1}{3} \left| \frac{k_2}{k_3} \right| = x_1$

Mit (*) folgt nun, dass x_3 im Konvexitätsbereich von K liegt.

Wegen $K_V(x) = K(x) - K(0) = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$ unterscheiden sich K_V und K nur um eine additive Konstante. Damit stimmen die Konvexitätsbereiche bzw. Konkavitätsbereiche von K_V und K überein, womit gezeigt ist, dass x_3 im Konvexitätsbereich von K_V liegt.

(b) Gegeben sei die Kostenfunktion $K(x) = 250.000 + 3000x - 9x^2 + 0{,}01x^3$. Es gilt also nach (a) für das Minimum x_1 der Grenzkostenfunktion

$$x_1 = -\frac{1}{3}\frac{k_2}{k_3} = 300$$

Mit (*) folgt

K ist konkav in $[0, 300)$,

K ist konvex in $(300, \infty)$.

Die Funktion D_V der variablen Durchschnittskosten ist gegeben durch $D_V(x) = k_1 + k_2 x + k_3 x^2$

$$= 3000 - 9x + 0{,}01\, x^2$$

Nach (a) gilt $x_3 = -\frac{k_2}{2k_3} = 450$.

Zusatz: Die Durchschnittskosten sind gegeben durch

$$D(x) = 250\,000 \cdot \frac{1}{x} + 3000 - 9x + 0{,}01\, x^2$$

Nach Vorlesung existiert ein eindeutiges lokales Minimum $x_2 > 0$, welches zugleich globales Minimum ist. Es gilt $D'(x) = -250.000 \frac{1}{x^2} - 9 + 0{,}02\, x$

x_2 erfüllt die Gleichung

$D'(x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -250.000 \frac{1}{x_2^2} - 9 + 0{,}02\, x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}02\, x_2^3 - 9 x_2^2 - 250.000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2^3 - 450 \cdot x_2^2 - 12500000 = 0$$

Es ist also eine Nullstelle von $f(x) := x^3 - 450\, x^2 - 12500000$ zu bestimmen.

Wende die Newton-Iteration

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)} \quad \text{mit Startwert } \tilde{x}_0 := 700$$

$$= \tilde{x}_n - \frac{\tilde{x}_n^3 - 450\, \tilde{x}_n^2 - 12500000}{3\, \tilde{x}_n^2 - 900\, \tilde{x}_n} \quad \text{an.}$$

Ausrechnen ergibt

$\tilde{x}_1 \approx 569{,}05$ $\quad$ $\tilde{x}_3 \approx 500{,}50$

$\tilde{x}_2 \approx 512{,}33$ $\quad$ $\tilde{x}_4 \approx 500{,}00$

Die Vermutung liegt nahe, dass $x = 500$ Nullstelle von f ist. Einsetzen bestätigt dies: $f(500) = 0$

$\Rightarrow x_2 = 500$ [Hier wurde nicht Satz (23.1) angewendet, sondern lediglich ein heuristisches Verfahren, das einen Kandidaten für eine Nullstelle von f liefert

4. Aufgabe

(a) f setzt sich zusammen aus den Teilfunktionen

$$f_0(x) := 0 \quad , x \in [\underbrace{0}_{a_0:=}, \underbrace{7835}_{b_0:=})$$
$$f_1(x) := \frac{(x-415)^2}{106000} - \frac{2597}{5} \quad , x \in [\underbrace{7835}_{a_1:=}, \underbrace{13135}_{b_1:=})$$
$$f_2(x) := \frac{(x+39665)^2}{440000} - 5329 \quad , x \in [\underbrace{13135}_{a_2:=}, \underbrace{52735}_{b_2:=})$$
$$f_3(x) := \frac{21x - 403685}{50} \quad , x \in [\underbrace{52735}_{a_3:=}, \underbrace{250.000}_{b_3:=})$$
$$f_4(x) := \frac{9x - 311474}{20} \quad , x \in [\underbrace{250.000}_{a_4:=}, \underbrace{\infty}_{b_4:=})$$

Da die Teilfunktionen allesamt als Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet stetig sind, genügt es nachzuprüfen, dass $f_i(b_i) = f_{i+1}(a_{i+1})$ gilt, wobei $b_i = a_{i+1}$ ist, für $i \in \{0, \dots, 3\}$.

Es ist
$$f_0(7835) = 0 = f_1(7835)$$
$$f_1(13135) = 1007 = f_2(13135)$$
$$f_2(52735) = 14075 = f_3(52735)$$
$$f_3(250.000) = 96\,926{,}3 = f_4(250.000).$$

Also ist f stetig.

(b) Da die Teilfunktionen $f_0, f_1, \dots, f_4$ als Fktn. von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet als Polynomfktn. in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist f jeweils im Inneren (a_i, b_i) der Intervalle $[a_i, b_i]$, $i \in \{0, \dots, 4\}$ differenzierbar. Dort gilt

$$f'(x) = f_0'(x) = 0 \quad , x \in (0, 7835)$$
$$f'(x) = f_1'(x) = \frac{2(x-415)}{106000} \quad , x \in (7835, 13135)$$
$$f'(x) = f_2'(x) = \frac{2(x+39665)}{440000} \quad , x \in (13135, 52735)$$
$$f'(x) = f_3'(x) = \frac{21}{50} \quad , x \in (52735, 250.000)$$
$$f'(x) = f_4'(x) = \frac{9}{20} \quad , x \in (250.000, \infty)$$

Weiterhin gilt [Ausrechnen!]

$f_0'(7835) = 0$

$f_1'(7835) = 0{,}14$

$f_1'(13135) = 0{,}24$

$f_2'(13135) = 0{,}24$

$f_2'(52735) = 0{,}42$

$f_3'(52735) = 0{,}42$

$f_3'(250.000) = 0{,}42$

$f_4'(250.000) = 0{,}45$,

so dass f nicht in 7835 und 250.000 differenzierbar ist. Die links- und rechtsseitigen Ableitungen existieren dort aber und die linksseitige Ableitung ist kleiner als die rechtsseitige. f ist in 13135, 52735 differenzierbar mit $f'(13135) = 0{,}24$ und $f'(52735) = 0{,}42$.

(c) Im Innern der Intervalle $[a_i, b_i]$ ist f' entweder konstant oder linear mit positivem höchsten Koeffizienten. Daher ist f' dort monoton wachsend. In den Nichtdifferenzierbarkeitsstellen existieren links- und rechtsseitige Ableitungen, wobei die linksseitige Ableitung kleiner als die rechtsseitige Ableitung ist.
Damit ist f im verallgemeinerten Sinne konvex.

(d) Da f im verallg. Sinne konvex ist, gilt f.a. $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a < b$ und alle $t \in [0,1]$

$$(*) \quad f(a + t(b-a)) \leq f(a) + t(f(b) - f(a))$$

Zudem gilt $(*)$ auch für $a = b$

Seien nun a und b die Einkommen der beiden Ehepartner. Dann gilt für die Steuerzahlung jedes einzelnen Ehepartners nach dem Prinzip des Ehegatten-splittings [(*) mit $t = \frac{1}{2}$]

$$f(a + \tfrac{1}{2}(b-a)) \leq f(a) + \tfrac{1}{2}(f(b) - f(a))$$
$$= \tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{2} f(b)$$

und damit für die gesamte Steuer nach dem Ehegattensplitting

$$2 f(\underbrace{a + \tfrac{1}{2}(b-a)}_{= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b}) \leq 2 \left[\tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{2} f(b) \right] = f(a) + f(b),$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

$\square$