Musterlösung Serie 14

1. Aufgabe

(a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{x+2y} + 2x \cdot \sin(z) + z^2 xy$

f ist in allen Variablen partiell differenzierbar, da die Fktn. einer Variablen $t \mapsto e^t$, $t \mapsto \sin(t)$, $t \mapsto t^n$, $n \in \mathbb{N}$, differenzierbar sind.

Es gilt

$f_x(x,y,z) = e^{x+2y} + 2 \cdot \sin(z) + z^2 y$

$f_y(x,y,z) = 2 \cdot e^{x+2y} + z^2 x$

$f_z(x,y,z) = 2x \cdot \cos(z) + 2zxy$

(b) $g: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 y^3 + y \cdot \ln(x)$

g ist partiell differenzierbar, da die entspr. Fktn. einer Variablen nach Vorlesung differenzierbar sind.

Es gilt

$g_x(x,y) = 2xy^3 + y \cdot \frac{1}{x}$

$g_y(x,y) = 3x^2y^2 + \ln(x)$

g_x, g_y sind partiell diff'bar, da die entspr. Fktn. einer Variablen nach Vorlesung diff'bar sind.

Es ist

$g_{xx}(x,y) = 2y^3 - y \cdot \frac{1}{x^2}$

$g_{xy}(x,y) = 6xy^2 + \frac{1}{x}$

$g_{yx}(x,y) = 6xy^2 + \frac{1}{x}$

$g_{yy}(x,y) = 6x^2y$

(c) Es wird gezeigt, dass es keine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_x(x,y) = f_y(x,y) = xy$ f.a. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gibt.

Angenommen, es gibt doch eine solche Funktion. Dann ist f offenbar partiell differenzierbar und f_x und f_y sind ebenfalls partiell differenzierbar mit

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y \\ f_{xy}(x,y) &= x \\ f_{yx}(x,y) &= y \\ f_{yy}(x,y) &= x \end{aligned}\right\} \text{ f.a. } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

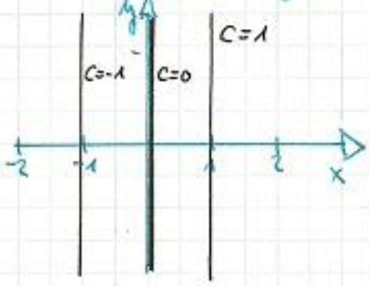
Offenbar ist f also 2-mal stetig partiell differenzierbar [da $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ stetig sind]. Die Funktionen f_{xy} und f_{yx} müssten also nach dem Satz von Schwarz identisch sein, was nicht der Fall ist, da z.B. $f_{xy}(0,1) = 0 \neq 1 = f_{yx}(0,1)$ gilt. Also ist ein Widerspruch erzielt, womit es keine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den obigen Eigenschaften gibt.

$\square$

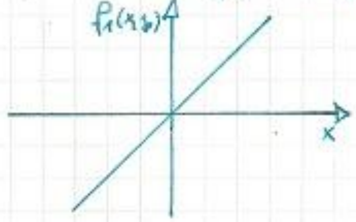
2. Aufgabe

(a) Behandle zunächst die Teilaufgaben (i), (ii) für die Funktion $f_1(x,y) = x$

(i)



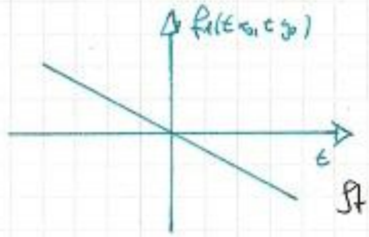
(ii) $x \mapsto f_1(x, y_0) = x$, $y_0 \in \mathbb{R}$ fest :



$y \mapsto f_1(x_0, y) \equiv x_0$:

dieses bedeutet, dass die Funktion nur den konst. Wert x_0 annimmt

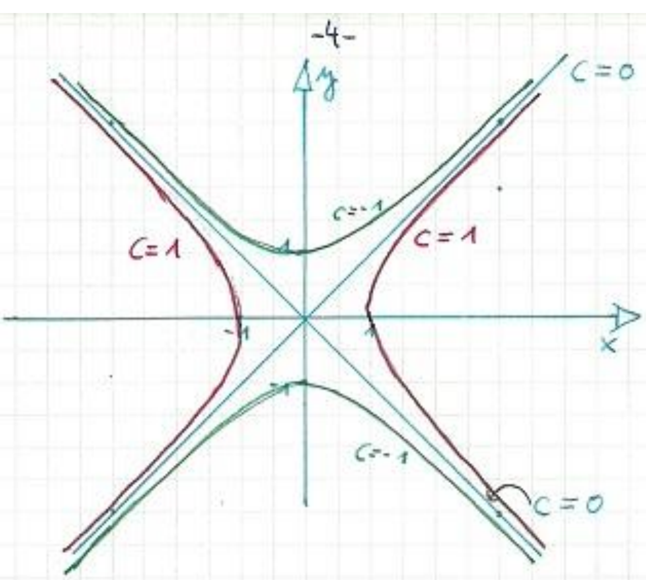
$t \mapsto f_1(t x_0, t y_0)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ fest
$= t x_0$



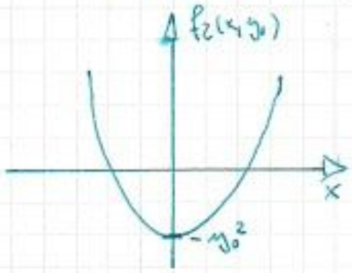
Steigung x_0 [hier $x_0 < 0$]

Nun werden die Teilaufgaben (i), (ii) für die Funktion $f_2(x,y) = x^2 - y^2$ behandelt.

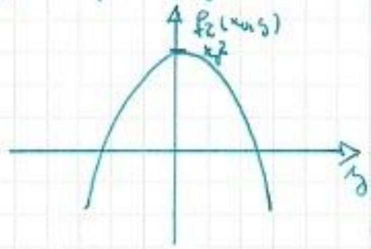
(i)



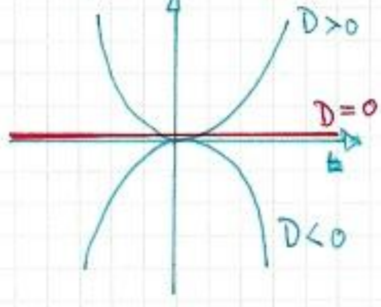
(ii) $x \mapsto f_2(x, y_0) = x^2 - y_0^2$, $y_0 \in \mathbb{R}$ fest:



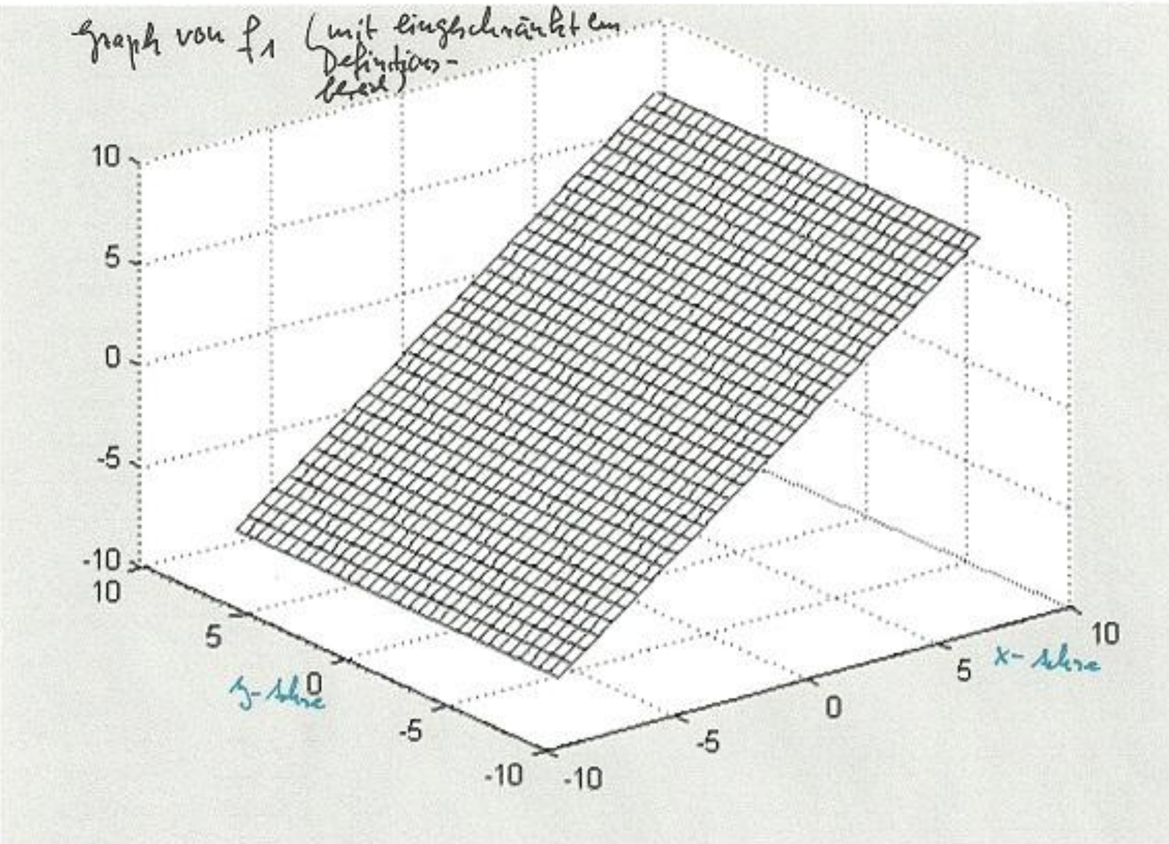
$y \mapsto f_2(x_0, y) = x_0^2 - y^2$

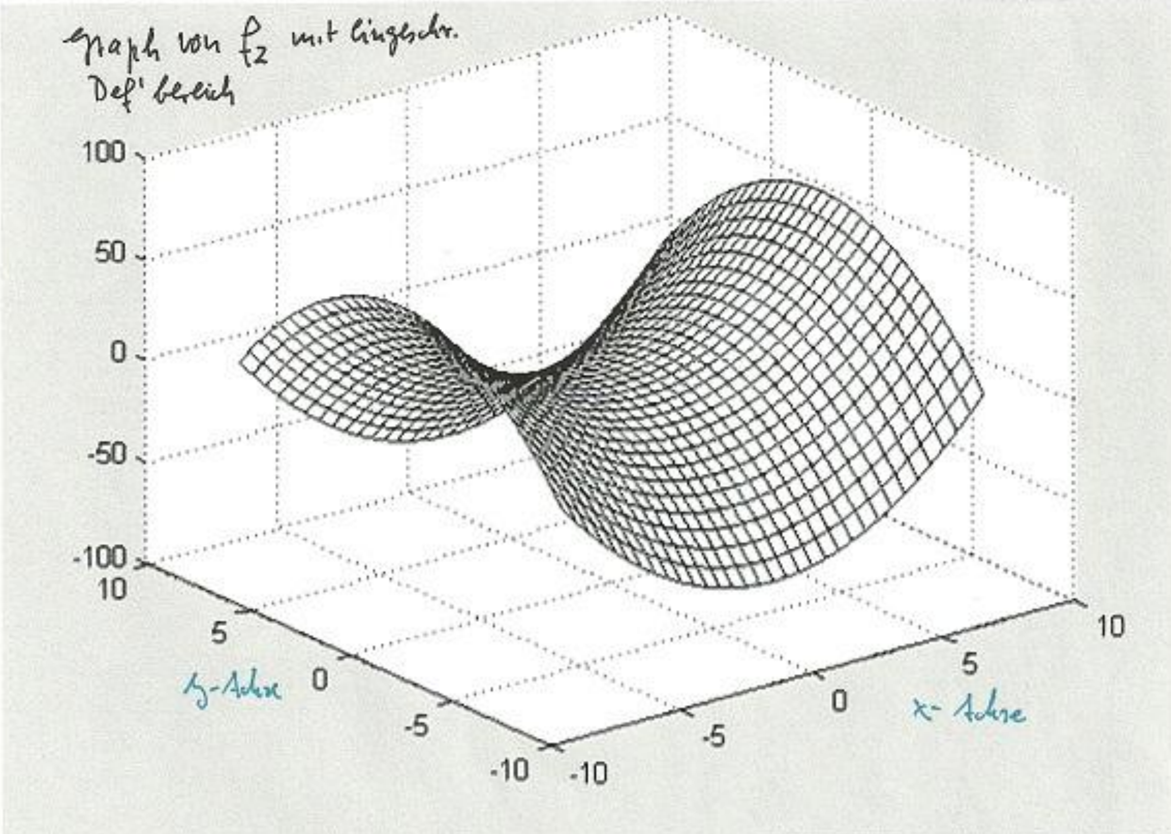


$t \mapsto f_2(t x_0, t y_0) = t^2 x_0^2 - t^2 y_0^2 = t^2 \overbrace{[x_0^2 - y_0^2]}^{D:=}$

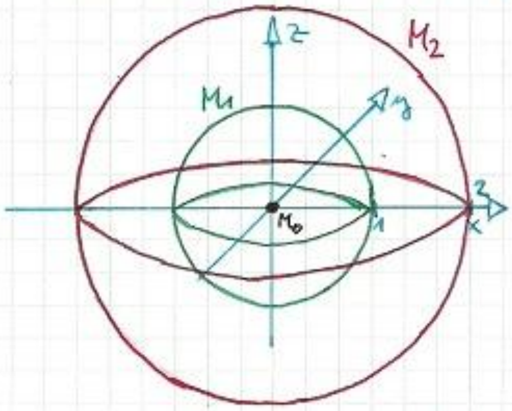


(iii)


Graph von f_1 (mit eingeschränktem Definitions-bereich)
10
5
0
-5
-10
y-Achse
x-Achse


Graph von f_2 mit eingeschr. Def'bereich
100
50
0
-50
-100
y-Achse
x-Achse

(b) Gegeben ist die Funktion $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
Nach dem Satz des Pythagoras ist $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ gerade der Abstand des Punktes (x,y,z) zum Koordinatenursprung. Damit sind die Mengen M_1 und M_2 Kugelschalen mit Radius 1 bzw. $\sqrt{4}=2$ von Kugeln mit Mittelpunkt im Ursprung.
Die Menge M_0 besteht offenbar nur aus $(0,0,0)$.



Nein, es gibt keine Funktionen $h_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i=1,2$, definiert auf geeigneten Definitionsbereichen, so dass

(*) $M_i = \{(x,y,h_i(x,y)) : (x,y) \in D_i\}$ gilt, da für einen Punkt $(x,y,z) \in M_i$ mit $x^2+y^2<1$ bzw. $x^2+y^2<4$ ebenfalls der an der x-y-Ebene gespiegelte Punkt $(x,y,-z)$ in M_i enthalten ist und $z \neq -z$ gilt. Damit könnte einer der beiden Punkte (x,y,z), $(x,y,-z)$ nicht auf die in (*) beschriebene Weise erzeugt werden.

$\square$

3. Aufgabe

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

f ist partiell differenzierbar mit

$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$

Damit eine (lokale) Extremstelle vorliegt, muss der Gradient an der selben Stelle gleich $(0,0)$ sein. Setze also

$f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$

Daraus ergibt sich

$\text{I} \quad x^3 - y = 0$

$\text{II} \quad y^3 - x = 0$

Einsetzen von $y = x^3$ in I ergibt

$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4+1)(x^4-1)$

$= x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

Diese Gleichung ist genau für $x = 0, 1, -1$ erfüllt

Einsetzen dieser Werte in $y = x^3$ ergibt:

$(0,0), (1,1), (-1,1)$ sind die kritischen Punkte von f

Als Nächstes werden die zweiten partiellen Ableitungen von f bestimmt:

$f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = -4$

$f_{yx}(x,y) = -4$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

Mit Satz (28.8) der Vorlesung wird nun nachgeprüft, ob in den krit. Pkten auch ein Extremum vorliegt. Es ist

$\Theta(x,y) := f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$

$= 144x^2y^2 - 16$

Einsetzen von (0,0) ergibt
$\Theta(0,0) = -16 < 0$, so dass nach (28.8) in (0,0) kein Extremum vorliegt.

Weiter ist

- $\Theta(1,1) = 128 > 0$ und $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, so dass in (1,1) ein lokales Minimum vorliegt.
- $\Theta(-1,1) = 128 > 0$ und $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$, so dass in (-1,-1) ein lokales Minimum vorliegt.

(b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{-x^2}(4y + x^2 - y^2)$

g ist partiell differenzierbar mit

$$g_x(x,y) = -2x \cdot e^{-x^2}[4y + x^2 - y^2] + e^{-x^2} \cdot 2x$$
$$= e^{-x^2}[-2x^3 + 2x + 2xy^2 - 8xy],$$

$$g_y(x,y) = e^{-x^2}[4 - 2y].$$

Für die Suche nach lokalen Extrema setze wieder grad $g = (0,0)$.

Es ergibt sich also

$$\text{I} \quad 2x \cdot e^{-x^2}[-x^2 + 1 + y^2 - 4y] = 0$$
$$\text{II} \quad e^{-x^2}[4 - 2y] = 0$$

Aus II folgt $y = 2$

Einsetzen von $y=2$ in I ergibt

$$2x \cdot e^{-x^2}[-x^2 - 3] = 0$$

Diese Gleichung ist nur für $x = 0$ erfüllt

$\Rightarrow$ (0,2) ist der einzige kritische Punkt von g.

Wende wieder Satz (28.8) an zur Überprüfung auf (lokale) Extrema.

Es gilt zunächst für die zweiten partiellen Ableitungen von g:

$$g_{xx}(x,y) = -2x\cdot e^{-x^2}[-2x^3+2x+2xy^2-8xy] + e^{-x^2}[-6x^2+2+2y^2-8y] = e^{-x^2}[4x^4-10x^2-4x^2y^2+16x^2y+2+2y^2-8y]$$

$$g_{xy}(x,y) = e^{-x^2}[4xy-8x]$$
$$g_{yx}(x,y) = -2x\cdot e^{-x^2}[4-2y]$$
← g zweimal partiell differenzierbar!

$$g_{yy}(x,y) = -2e^{-x^2}.$$

Damit gilt für

$$\Theta(x,y) := g_{xx}(x,y)\, g_{yy}(x,y) - g_{xy}^2(x,y)$$

$$\Theta(0,2) = -6\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 12$$

Da zudem $g_{xx}(0,2) = -6$ gilt, liegt in $(0,2)$ ein <u>lokales Maximum</u> vor. Es gibt kein weiteres Extremum, da $(0,2)$ der einzige kritische Punkt ist.

□

4. Aufgabe

Sei $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^2-2xy+2y$.

Auf der Suche nach (globalen) Minimum und Maximum [diese existieren zwangsläufig, da D ein abgeschlossenes beschränktes zweidimensionales Intervall und f stetig ist] suchen wir zunächst (lokale) Extrema. f ist partiell differenzierbar mit

$$f_x(x,y) = 2x-2y,$$
$$f_y(x,y) = -2x+2$$

Setze grad $f = (0,0)$

$\Rightarrow$ I $2x-2y=0$

II $-2x+2=0$

Aus II folgt $x=1$. Dieses eingesetzt in I liefert $y=1$

Damit ist $(1,1)$ der einzige kritische Punkt von f.

f ist sogar zweimal partiell differenzierbar mit

$f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=-2$

$f_{yx}(x,y)=-2$, $f_{yy}(x,y)=0$

Damit $\Theta(1,1)= 2\cdot 0-(-2)\cdot(-2)=-4$

Nach Satz (28.9) liegt damit in $(1,1)$ <u>kein Extremum</u> vor.

Damit folgt, dass Minimum und Maximum auf dem Rand von D angenommen werden, da andernfalls die Minimal- und Maximalstellen zugleich (lokale) Extremstellen wären.

Der Rand von D ist gleich $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ mit

$L_1 := \{(x,0) : 0 \le x \le 3\}$, $L_2 := \{(3,y): 0 \le y \le 2\}$,

$L_3 := \{(x,2) : 0 \le x \le 3\}$, $L_4 := \{(0,y) : 0 \le y \le 2\}$

Auf diesen 4 Strecken werden jeweils Maximum und Minimum einzeln bestimmt und anschließend untereinander verglichen. Es ist für $(x,y) \in L_1$

$f_{|L_1}: L_1 \to \mathbb{R}$, $f_{|L_1}(x,y) = f(x,0) = x^2$

Dort ~~ist~~ liegt offensichtlich in $(3,0)$ das Maximum mit $f(3,0)=9$ vor und in $(0,0)$ das Minimum mit $f(0,0)=0$ vor.

Betrachte nun $f|_{L_2} : L_2 \to \mathbb{R}$, $f|_{L_2}(x,y) = f(3,y)$
$= 9 - 6y + 2y = 9 - 4y$ für $(x,y) \in L_2$

Dort gilt:
In $(3,0)$ liegt das Maximum mit $f(3,0) = 9$ vor,
In $(3,2)$ liegt das Minimum mit $f(3,2) = 1$ vor.

Betrachte nun $f|_{L_3} : L_3 \to \mathbb{R}$, $f|_{L_3}(x,y) = f(x,2)$
$= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ für $(x,y) \in L_3$

Dort gilt:
In $(0,2)$ liegt das Maximum mit $f(0,2) = 4$ vor,
In $(2,2)$ liegt das Minimum mit $f(2,2) = 0$ vor.

Betrachte nun $f|_{L_4} : L_4 \to \mathbb{R}$, $f|_{L_4}(x,y) = f(0,y)$
$= 2y$ für $(x,y) \in L_4$

Dort gilt:
In $(0,2)$ liegt das Maximum mit $f(0,2) = 4$ vor,
In $(0,0)$ liegt das Minimum mit $f(0,0) = 0$ vor.

Vergleicht man nun die erhaltenen Maxima und Minima auf den Strecken L_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, so stellt man fest:

In $\underline{(3,0)}$ wird das (globale) Maximum von f auf D angenommen und in keinem weiteren Punkt.

In den Punkten $\underline{(0,0)}$ und $\underline{(2,2)}$ wird das (globale) Minimum von f auf D angenommen. Es gibt keine weiteren Pkte mit dieser Eigenschaft.

□