Musterlösung Serie 15

1. Aufgabe

(a) Es ist die Funktion $f(x,y,z) := (x-1)^2 + y^2 + z^2$
unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) := x+y-z = 0$ (*)
zu minimieren.

Die Gleichung (*) läßt sich nach z auflösen:

$$z = x+y$$

Dieser Ausdruck läßt sich für z in die Funktionsvorschrift von f einsetzen

$$\tilde{f}(x,y) := f(x,y,x+y) = (x-1)^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2$$
$$= 2x^2 - 2x + 1 + 2y^2 + 2xy,$$

wobei $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Gesucht wird also das Minimum, sofern existent, der Funktion $\tilde{f}$.

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lok. Min. ist

(**) $\tilde{f}_x(x,y) = 0 = \tilde{f}_y(x,y)$, wobei

$$\tilde{f}_x(x,y) = 2(x-1) + 2x + 2y = 4x + 2y - 2$$
$$\tilde{f}_y(x,y) = 2y + 2x + 2y = 2x + 4y$$

Mit (**) ergibt sich

I $4x + 2y - 2 = 0$

II $2x + 4y = 0$

II: $x = -2y$

In I: $0 = -8y + 2y - 2 = -6y - 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

Mit II: $x = \frac{2}{3}$

Mit (*): $z = \frac{1}{3}$

Damit ist $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ der einzige kritische Punkt von $\tilde{f}$.

Wegen $\tilde{f}(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0}$ gilt

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \tilde{f}(x,y) = \infty .$$

Da $\tilde{f}$ stetig ist, besitzt $\tilde{f}$ damit ein globales Minimum. Dieses ist zugleich lokales Minimum und da die Pkte, in denen lok. Extrema von part. diff'baren Funktionen angenommen werden, kritische Pkte sein müssen [Das Argument ist nur gültig, wenn die entsprechenden Punkte innere Punkte sind], folgt

In $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ nimmt $\tilde{f}$ ihr globales Min. an und dieser Pkt. ist der einzige mit dieser Eigenschaft.

$\Rightarrow$ In $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nimmt f unter der Nebenbed. (*) ihr globales Min. an und es gibt keine weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft.

(b) Zu minimieren und maximieren ist die Funktion

$$f(x,y,z) := (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

(*) unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1=0$

Um nachzuweisen, dass es Minimum und Maximum gibt, betrachte die Funktion

$$\tilde{f} : K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\} \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{f}(x,y,z) = f(x,y,z) \text{ für } (x,y,z) \in K$$

$\tilde{f}$ ist offenbar stetig und K ist eine beschränkte und abgeschlossene Menge.

"K beschränkt"

Für $(x,y,z) \in K$ gilt offenbar $x^2 \leq 1$, $y^2 \leq 1$, $z^2 \leq 1$ und damit $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$

"K abgeschlossen"

Sei (x_n, y_n, z_n), $n \in \mathbb{N}$, Folge in K und $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = (x_0, y_0, z_0)$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ und damit

$$x_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} x_0^2, \quad y_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} y_0^2, \quad z_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} z_0^2$$

und also

$$\underbrace{(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)}_{=1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

weshalb $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ und damit $(x_0, y_0, z_0) \in K$ gilt.

Nach Vorlesung nimmt $\tilde{f}$ Minimum und Maximum an, also tut f dieses auch unter der Bed. (*).
Weiter ist f partiell differenzierbar mit

$$f_x(x,y,z) = 2(x-1)$$
$$f_y(x,y,z) = 2(y-1)$$
$$f_z(x,y,z) = 2(z-1)$$

Die partiellen Ableitungen sind offenbar stetig.
Nun ist die Lagrangesche Multiplikatorregel anwendbar, nach welcher es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\operatorname{grad} f + \lambda \cdot \operatorname{grad} g = 0$$

Dieses führt zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & 2(x-1) + \lambda \cdot 2x = 0 & \rightsquigarrow x = \frac{1}{1+\lambda} \\ \mathrm{II} & 2(y-1) + \lambda \cdot 2y = 0 & \rightsquigarrow y = \frac{1}{1+\lambda} \\ \mathrm{III} & 2(z-1) + \lambda \cdot 2y = 0 & \rightsquigarrow z = \frac{1}{1+\lambda} \end{array}$$

und

$$(*) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Einsetzen der Werte für x, y, z in (*):

$$3\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

Die letzte Gleichung wird von $\lambda_0 = -1-\sqrt{3}$ und $\lambda_1 = -1+\sqrt{3}$ gelöst

Einsetzen von λ_0 und λ_1 in I - III:

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Einsetzen dieser Punkte in f ergibt

$$f(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2$$
$$= 3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3\,\frac{(1+\sqrt{3})^2}{3} = (1+\sqrt{3})^2$$

$$f(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)^2$$
$$= (1-\sqrt{3})^2$$

Also ist $(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ der eindeutige Punkt auf der Kugeloberfläche K, der größten Abstand zu $(1,1,1)$ besitzt und $(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ der eindeutige Punkt auf K, der kleinsten Abstand zu $(1,1,1)$ besitzt.

$\square$

2. Aufgabe

Gegeben seien die Punkte $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i^k)^2, \; x \in \mathbb{R}^n$$

Es wird zunächst gezeigt, daß f ein Minimum besitzt.
Dazu wird gezeigt, daß

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{und } f \text{ stetig}$$

gilt [siehe Satz aus der Vorlesung].

Stetigkeit von f

Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $(x^{\tilde{k}})_{\tilde{k} \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{\tilde{k} \to \infty} x^{\tilde{k}} = x^0$.
Dann gilt ebenfalls $\lim_{\tilde{k} \to \infty} x_i^{\tilde{k}} = x_i^0$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Damit ebenfalls

$$\lim_{\tilde{k} \to \infty} (x_i^{\tilde{k}} - a_i^k)^2 = (x_i^0 - a_i^k)^2$$

f.a. $i = 1, \dots, n$,
f.a. $k = 1, \dots, n$

und schließlich

$$\lim_{\tilde{k} \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\tilde{k}} - a_i^k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^0 - a_i^k)^2,$$

d.h. $\lim_{\tilde{k} \to \infty} f(x^{\tilde{k}}) = f(x^0)$.
Also ist f stetig.

"$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$"

Kugel um 0 mit Radius R_0

Sei $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a^k \in B(0, R_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le R_0\}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dann gilt für alle $C > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin B(0, R_0 + \sqrt{C})$ [d.h. x liegt außerhalb der Kugel, deren Radius um $\sqrt{C}$ vergrößert wurde von weiter oben]

$$|a^k - x| \geq \sqrt{C} \quad \text{f.a. } k=1,\dots,n$$

also $|a^k - x|^2 \geq C$ f.a. $k=1,\dots,n$

damit $f(x) \geq nC > C$.

Also ist gezeigt, daß für jede vorgegebene Schranke $C>0$ eine Zahl $R>0$ [nämlich $R_0+\sqrt{C}$] existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > R$

$f(x) > C$ gilt.

In Kurzform bedeutet dieses $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$.

Insgesamt folgt damit, daß f auf jeden Fall ein Minimum besitzt, also ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y).$$

Weiter ist f partiell differenzierbar mit

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x_j - a_j^k) \quad \text{für } j \in \{1,\dots,n\}$$

Notwendig für das Vorliegen eines Minimums von f in x ist die Bedingung

$$\text{grad } f(x) = \underbrace{(0,\dots,0)}_{\in \mathbb{R}^n},$$

da in x ebenfalls ein lokales Minimum vorliegen muss.

Setze also für $j \in \{1,\dots,n\}$

$$f_j(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} 2(x_j - a_j^k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n x_j - 2\sum_{k=1}^{n} a_j^k = 0$$

$$\Leftrightarrow x_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^k$$

Damit ist der Punkt $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a^k$ [Die Addition im $\mathbb{R}^n$ verläuft komponentenweise] der einzige kritische Punkt von f. Da, wie weiter oben gezeigt, f ein Minimum besitzt, folgt:

f nimmt in $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a^k$ ihr Minimum an und es gibt keine weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft.

$\square$

3. Aufgabe

(a) Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$
f ist zweimal partiell differenzierbar mit
$f_x(x,y) = 2x - 2y$
$f_y(x,y) = 2y - 2x$

$f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -2$
$f_{yx}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = 2$

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremum ist

$$f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$$

Dieses führt zum linearen Gleichungssystem

I $\quad 2x - 2y = 0$
II $\quad 2y - 2x = 0$,

welches von allen (x,x), $x \in \mathbb{R}$, gelöst wird.
Diese Punkte sind also die krit. Pkte von f.
Weiter gilt

$$\Theta(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 4 - 4 = 0 ,$$

womit das Kriterium von Satz (29.8) nicht anwendbar ist. Umformen ergibt aber
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1 = (x-y)^2 + 1$, womit in allen Pkten der Menge $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ das globale Minimum mit Funktionswert 1 angenommen wird. In diesen Pkten werden zugleich auch alle lokalen Minima angenommen.
Offenbar gilt es wegen

$$\lim_{x \to \infty} f(x,y) = \infty \text{ und } \lim_{y \to \infty} f(x_0,y) = \infty$$

bei festgehaltenen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ kein globales Maximum. Es gilt zudem auch keine lokalen Maxima, da die Pkte $(x,x), x \in \mathbb{R}$, die einzigen kritischen Punkte sind und $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x+\varepsilon, x) > f(x,x) = 1$ gilt.

(b) Gegeben ist die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$

g ist in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar mit

$$g_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$g_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

und g ist in $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar.

Offenbar gilt f.a. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\operatorname{grad} g(x,y) \neq (0,0)$

Damit gibt es innerhalb dieser Menge keine lokalen Extrema.

Jedoch gilt $g(0,0) = 0$ und $g(x,y) < 0$ f.a. $(x,y) \neq (0,0)$, so daß in $(0,0)$ ein globales [sogar striktes] und lokales Maximum vorliegt und $(0,0)$ ist der einzige Pkt, in welchem das Maximum angenommen wird. Es gibt damit insbesondere keine lokalen und damit auch keine globalen Minima.

$\square$

4. Aufgabe

(a)

(i) Setze $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

Sei $(x_0, y_0) \in M$ beliebig. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit

(*) $\quad 1 + \varepsilon < x_0^2 + y_0^2 < 2 - \varepsilon$

Es wird nun ein $\delta > 0$ angegeben, so daß der offene Quader $J := ((x_0-\delta, y_0-\delta), (x_0+\delta, y_0+\delta))$ in M enthalten ist. $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta\}$

Wenn es gelingt zu zeigen, daß die 4 Punkte $(x_0 \pm \delta, y_0 \pm \delta)$, wobei alle Vorzeichenkombinationen erlaubt sind, in M enthalten sind, dann ist auch $J \subset M$.

Es gilt

$$(x_0 \pm \delta)^2 + (y_0 \pm \delta)^2 = x_0^2 \pm 2\delta x_0 + \delta^2 + y_0^2 \pm 2\delta y_0 + \delta^2$$
$$= x_0^2 + y_0^2 + 2\delta(\pm x_0 \pm y_0) + 2\delta^2$$

Wegen (*) genügt es zu zeigen, daß

$$|2\delta(\pm x_0 \pm y_0) + 2\delta^2| \le \varepsilon$$

für noch explizit zu wählendes $\delta > 0$ gilt.

Wegen der Dreiecksungleichung reicht es aus,

(**) $\quad 2\delta K + 2\delta^2 \le \varepsilon$

zu zeigen, wobei $K := \max|\pm x_0 \pm y_0|$ sei.

Um δ zu bestimmen (bzw. ein passendes δ zu finden) setze also

$$2\delta K + 2\delta^2 = \varepsilon$$
$$\iff \quad \delta^2 + K\delta - \frac{\varepsilon}{2} = 0$$

Die letzte Gleichung wird von $\delta_1 = -\frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}} < 0$ und $\delta_2 = -\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}} > 0$ gelöst.

Wähle also $\delta := \delta_2$. Dann erfüllt δ die Bed. (**)

und mit den Überlegungen von weiter oben folgt

$$1 < (x_0 \pm \delta)^2 + (y_0 \pm \delta)^2 < 2 \text{ , d.h. } (x_0 \pm \delta, y_0 \pm \delta) \in M$$

und damit gilt $J \subset M$, wobei J wie weiter oben durch (x_0, y_0) und δ definiert ist. Damit ist M offen.

(ii) Sei $N := (-10, 6) \cup (-5, -1)$ und sei $x \in (-10, -6)$.

1. Fall $x \in (-10, 6)$. Sei $\varepsilon_1 := x - (-10) = x + 10$ und $\varepsilon_2 := -6 - x$. Dann gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
$-10 + \varepsilon < x < -6 - \varepsilon$. Also ist $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (-10, 6) \subset N$

2. Fall $x \in (-5, -1)$. Sei $\varepsilon_3 := x - (-5) = x + 5$ und $\varepsilon_4 := -1 - x$. Dann gilt für $\tilde{\varepsilon} := \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$
$-5 + \tilde{\varepsilon} < x < -1 - \tilde{\varepsilon}$. Also ist $(x - \tilde{\varepsilon}, x + \tilde{\varepsilon}) \subset (-5, -1) \subset N$.

Damit läßt sich für jedes $x \in N$ ein offenes Intervall finden, welches x enthält und in N enthalten ist. Damit ist N offen.

(b)

(i) Sei $P := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq 1 \text{ für } i = 1,2,3 \}$
Seien x^n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in P und $x^0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\lim_{n \to \infty} x^n = x^0$. Dann gilt für alle Komponenten $i = 1,2,3$

$$\lim_{n \to \infty} x_i^n = x_i^0$$

Da die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $y \mapsto |y|$, stetig ist, folgt daraus

$$1 \geq \lim_{n \to \infty} |x_i^n| = |x_i^0| \quad \text{für } i = 1,2,3$$

Also ist $x^0 \in P$, womit gezeigt ist, daß P abgeschlossen ist.

(ii) Sei $Q := \{ x \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{K(x)}{x} \leq c \}$, wobei $K(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$ eine Kostenfktn. mit $k_0 > 0$ und $c > 0$ ist.

Seien $x_n, n \in \mathbb{N}$, Folge in Q und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Zeige zuerst, daß $x_0 > 0$ gilt.

Andernfalls ist $x_0 = 0$. Für $x > 0$ ist $D(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{k_0}{x} + k_1 + k_2 x + k_3 x^2$ und damit $\lim_{x \searrow 0} D(x) = \infty$ wegen $k_0 > 0$. Da $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ gilt, müßte also im Fall $x_0 = 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, so daß $D(x_n) > c$ für alle $n \geq N_0$, was ein Widerspruch zu $x_n \in Q$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ist. Also gilt $x_0 > 0$.

Damit $x_0 \in Q$ gilt, muss also nur noch gezeigt werden, daß $D(x_0) \leq c$ gilt. Dies folgt aber aus der Stetigkeit von $D: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$:

$$D(x_0) = \lim_{n \to \infty} D(x_n) \leq c, \text{ da f.a. } n \in \mathbb{N}$$

$D(x_n) \leq c$ gilt.

Also ist $x_0 \in Q$ und es ist gezeigt, daß Q abgeschlossen ist.

(c) Sei $S := [-1, 1] \setminus \{0\}$. Zeige zuerst, daß S nicht offen ist.
Sei $x_0 := -1$. Dann gilt f.a. $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2) \not\subseteq S$, so daß keine Umgebung von x_0 existiert, die in S enthalten ist. Also ist S nicht offen.

Zeige nun, daß S nicht abgeschlossen ist. Betrachte dazu die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Jedes Folgenglied ist offenbar in S enthalten und es gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, wobei $0 \notin S$ ist. Damit ist S nicht abgeschlossen.

$\square$