

1. Aufgabe(a) Beweis per Induktion über n Bemerkung: Man kann die Aussage auch für alle $n \in \mathbb{N}_0$ formulieren und den Ind. A-P. dann für $n=0$ durchführen.Ind. A-P. Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Sei $n=1$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^1 q^k = \sum_{k=0}^1 q^k = 1 + q = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} \quad \checkmark$$

Ind. SchlussEs gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist nun

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{Ind. Ann.}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q) q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt.Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.(b) Beh. $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x$ Ind. Auf. $n=1$. Einfaches Ableiten von $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ergibt:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot (1-1)) \cdot e^x \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ind. Schluss

gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \stackrel{\text{Ind. Ann.}}{=} \left[(x^2 + 2nx + n(n-1)) \cdot e^x \right]'$$

$$\stackrel{\text{Produktregel}}{=} (2x + 2n) \cdot e^x + (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x$$

$$= (x^2 + 2(n+1)x + 2n + n(n-1)) e^x$$

$$= (x^2 + 2(n+1)x + (n+1)n) e^x,$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x \quad \text{f.ä. } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

2. Aufgabe

(a)

- Es gelte $A \cap B = \emptyset$
 - Dann folgt (i. A.) nicht $A \subset B$, denn:
Wähle $A := \{1, 2\}$, $B := \{3\}$. Dann gilt
offenbar $A \cap B = \emptyset$, aber nicht $A \subset B$.
 - Es folgt ebenfalls nicht $A = \emptyset$ aus $A \cap B = \emptyset$.
Wähle dazu wieder $A := \{1, 2\}$, $B := \{3\}$.
Dann gilt $A \cap B = \emptyset$, aber nicht $A = \emptyset$.
- Es gelte $A \subset B$
 - Dann folgt nicht $A \cap B = \emptyset$, denn:
Sei $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$. Dann gilt $A \subset B$,
aber $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$
 - Dann folgt ebenfalls nicht $A = \emptyset$, denn:
Sei wieder $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$. Dann gilt
 $A \subset B$, aber $A \neq \emptyset$
- Es gelte $A = \emptyset$.
 - Dann gilt $A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$
 - Dann gilt $A = \emptyset \subset B$ [die leere Menge ist
definitionsgemäß Teilmenge jeder Menge]

Es folgt also nur aus der Aussage " $A = \emptyset$ "
mindestens eine der anderen beiden.

(b) Es gelte $(A \cap B)^{\overset{-3}{=}\emptyset} \wedge (A \subset B)$

Dann folgt $A = \emptyset$, denn:

Ang $A \neq \emptyset$. Dann existiert $x \in A$. Wegen $A \subset B$ folgt dann $x \in B$, womit $x \in A \cap B$ $\nleftrightarrow$ in $A \cap B \neq \emptyset$.
Also gilt $A = \emptyset$.

Es gelte $(A \cap B = \emptyset) \wedge (A = \emptyset)$.

Da insbesondere $A = \emptyset$ gilt, ist wie in (a) $A \subset B$.

Es gelte $(A \subset B) \wedge (A = \emptyset)$

Da insbes. $A = \emptyset$ gilt, ist wie in (a) $A \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow$ Die Geltung von je zwei Aussagen impliziert stets die verbleibende.

□

3. Aufgabe

$$(a) \quad \binom{1000}{1000} = \frac{1000!}{1000! \cdot 0!} = \frac{1000!}{1000! \cdot 1} = 1$$

$$\binom{1001}{1000} = \frac{1000! \cdot 1!}{1000! \cdot 1!} = \frac{1000! \cdot 1001}{1000!} = 1001$$

$$\binom{20}{15} = \frac{20!}{(20-15)! \cdot 15!} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{5!}$$

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} = \binom{20}{15} = 15504$$

(b) Zu zeigen: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für alle
 $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k \leq n$

Direkter Beweis:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-k+1)}{(n-k+1)! \cdot k!} \\ &= \frac{n! [k + n - k + 1]}{((n+1)-k)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k} \quad \square \end{aligned}$$

(c) • Binomischer Lehrsatz:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \binom{n}{k}$ f.a. $a, b \in \mathbb{R}$

Wähle $a = b = 1$.

Dann ist $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n 1^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

• Begründung:

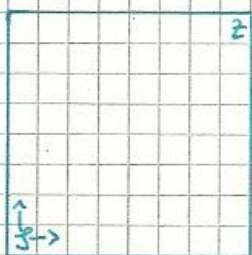
Nach Vorlesung ist 2^n gleich der Anzahl aller Teilmengen einer n -elementigen Menge und $\binom{n}{k}$ gerade die Anzahl der k -elementigen Teilmengen. Da man alle möglichen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gerade durch die Vereinigung (welche disjunkt ist!) aller k -elem. Teilmengen, wobei k die Werte 0 bis n durchläuft, erhält, folgt die Behauptung.

4. Aufgabe

- (a) Es müssen genau 4 aus der Menge der "Richtigen" und 2 aus der Menge der "Falschen" gezogen werden. Damit gilt für die Anzahl M der Möglichkeiten, genau 4 Richtiges zu ziehen:

$$M = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} \quad [\text{Zahl ausrechnen}]$$

(b)



Bei jedem in Frage kommenden Weg werden genau 14 Schritte zurückgelegt, davon genau 7 nach rechts und 7 nach oben. Damit wird die Situation auf das Problem, 7 Elemente (~~23~~ die z.B. als die Menge der Rechts-Schritte interpretiert werden können) aus einer 14-elementigen Menge zu wählen, zurückgeführt. Es gibt $\binom{14}{7}$ [Vert. mit Taschenrechner bestimmen] Möglichkeiten, dieses zu tun.

- (c) Sei $M(m)$ die Anzahl der möglichen Aufteilungen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 2m\}$ in Paare (d.h. diese Menge wird disjunkt in m Teilmengen der Mächtigkeit 2 zerlegt).

Beh. $M(m) = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \quad [= (2m-1) \cdot (2m-3) \cdot (2m-5) \cdot \dots \cdot 1]$

[Bemerkung: Beide Formeln lassen sich ebenfalls direkt begründen, wie schon hier per Induktion vor]

Induktion nach $m \in \mathbb{N}$

Ind. Anf.

Sei $m=1$, d.h. $n=2$

In diesem Fall besteht die Grundmenge nur aus einem Paar, womit es genau 1 Zerlegung in Paare gibt.

Weiter ist für $f(m) := \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$, $m \in \mathbb{N}$, $f(1) = \frac{2!}{2^1 \cdot 1!} = 1 \quad \checkmark$

Ind. Schluss

Es gelte die Aussage für $m \in \mathbb{N}$, d.h. wir setzen voraus:

$$M(m) = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}.$$

Nun erhält man aber alle Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 2m, 2m+1, 2m+2\}$ durch disjunkte Vereinigung von

- den Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 2m\}$, wobei jeweils das Paar $(2m+1, 2m+2)$ hinzugefügt wird, davon gibt es $M(m)$ und
- den Partitionen der Menge $\{1, 2, \dots, 2m\}$, bei denen das Element $2m+1$ mit einem der Elemente $k = 1, 2, \dots, 2m$ tauscht und derselbe Partner zugewiesen bekommt und das Paar $(k, 2m+2)$ hinzugefügt, davon gibt es $M(m) \cdot 2m$

$$\begin{aligned} \text{Damit ist also } M(m+1) &= M(m) + 2m \cdot M(m) \stackrel{\text{Ind. Vor.}}{=} \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} (1 + 2m) \\ &= \frac{(2m+1)!}{2^m \cdot m!} = \frac{(2m+2)!}{2^m \cdot m! \cdot (2m+2)} = \frac{(2m+2)!}{2^{m+1} \cdot (m+1)!} \\ &= \frac{(2m+2)!}{2^{m+1} \cdot (m+1)!}, \text{ womit die Beh. für } M(m+1) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Also gilt die Beh. $M(m) = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. $\square$