

1. Aufgabe

$$(a) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)}$$

$$= \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Der Nenner $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1$ konvergiert gegen 2. Damit gilt unter Anwendung der Limesregeln:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$(b) \quad b_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \stackrel{(*)}{\geq} 2^n$$

Beweis nicht unten

Da $2^n, n \in \mathbb{N}$, divergiert, kann b_n nicht gegen eine reelle Zahl konvergieren.

Es wird gezeigt, daß b_n ungerichtet gegen ∞ konvergiert. Dazu ist zu zeigen:

(i) $b_n, n \in \mathbb{N}$, ist unbeschränkt

Dies ist klar, da $b_n \geq 2^n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt und $2^n, n \in \mathbb{N}$, unbeschränkt ist.

(ii) b_n ist monoton wachsend

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = 2 \frac{2n+1}{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Also ist b_n streng monoton wachsend

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

Beweis von (*):

Es genügt zu zeigen: F.a. $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\frac{n+k}{k} \geq 2$$

$$\text{Es gilt } n \geq k \Leftrightarrow n+k \geq 2k \Leftrightarrow \frac{n+k}{2} \geq k$$

Damit gilt $\frac{n+k}{k} \geq 2$ f.a. $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\text{Also } \frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \geq 2^n$$

-3-

$$(c) \quad c_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Behauptung: $c_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert nicht gegen eine reelle Zahl.

Denn:

Der Ausdruck $\frac{n}{n+10}$ konvergiert gegen 1

[$\frac{n+10}{n} = \frac{n}{n} + \frac{10}{n} = 1 + \frac{10}{n}$ konvergiert gegen 1
und damit auch der Kehrwert gegen 1 nach Aufg. 3]

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{n}{n+10}$ konvergiert gegen $\frac{3}{2} > 1$

Also gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10} > 1,2 \quad \text{f. a. } n \geq n_0$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10} \right)^n \geq (1,2)^n \quad \text{f. a. } n \geq n_0 (*)$$

Es wird nun gezeigt, daß c_n unendlich gegen ∞ konvergiert. Dazu muss gezeigt werden:

(i) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt nach oben

Dieses folgt sofort aus (*), da $(1,2)^n, n \in \mathbb{N}$, unbeschränkt nach oben ist.

(ii) c_n ist ab einem gewissen Index monoton wachsend.

Zunächst gilt f. a. $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+1}{n+1+10} > \frac{n}{n+10}$$

Denn

$$\frac{n+1}{n+1+10} > \frac{n}{n+10} \Leftrightarrow (n+1)(n+10) > (n+10) \cdot n$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 11n + 10 > n^2 + 10n \Leftrightarrow 10 > 0$$

Sei $n \geq n_0$ (n_0 wie oben definiert)

Es gilt

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{n+10}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10}\right)^n} = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{n+1}{n+10}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10}}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{n+10}\right)$$
$$> 1^n \cdot 1,2 = 1,2$$

Also ist c_n ab dem Index n_0 tatsächlich monoton wachsend.

Zusammen: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$

(d) $d_n = \frac{n^3}{n! + n^2}, n \in \mathbb{N}$

Es gilt $0 \leq \frac{n^3}{n! + n^2} \leq \frac{n^3}{n!}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Es wird gezeigt, daß $\frac{n^3}{n!}$ gegen 0 konvergiert.
Dann folgt mit dem "Sandwichsatz"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Es ist $\frac{n^3}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}$ für $n \geq 3$

und $\frac{n \cdot n \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!} \cdot 1 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2}$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-3)!} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-2} = 1$$

Unter Anwendung der Limessregeln folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

(e)

$$l_n = \frac{2^n}{x^n} + \frac{3}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \left[\text{Der Ausdruck macht nur Sinn für } x \neq 0! \right]$$

Da $\frac{3}{n+2}, n \in \mathbb{N}$, Nullfolge ist, konvergiert l_n genau dann, wenn $\frac{2^n}{x^n}$ konvergiert.

$$\frac{2^n}{x^n} = \left(\frac{2}{x}\right)^n = q^n \quad \text{mit } q := \frac{2}{x}$$

Nach Vorlesung konvergiert $q^n, n \in \mathbb{N}$, genau für $q \in (-1, 1]$, d.h. $\frac{2}{x} \in (-1, 1]$

Es gilt $-1 < \frac{2}{x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \text{ oder } x < -2$$

Also: Für $x < -2$ oder $x > 2$ konvergiert

$\frac{2^n}{x^n}$ gegen 0 und für $x = 2$ konvergiert

$\frac{2^n}{x^n}$ gegen 1. Dasselbe gilt, da $\left(\frac{3}{n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge ist, für $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

[Für $x \in [-2, 2)$ divergiert $l_n, n \in \mathbb{N}$,]
wobei für $x \in (0, 2)$ $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ungerichtet gegen ∞ konvergiert. $\square$

2. Aufgabe

(a) (i) Wähle $a_n := n^2, b_n := \frac{1}{n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt offensichtlich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

(ii) Wähle $a_n := n^2, b_n := -\frac{1}{n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

$$\text{Ferner ist } a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = -n, \text{ so daß}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$$

(iii) Sei $c \in \mathbb{R}$.

Wähle $a_n := n$, $b_n := \frac{c}{n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

und $a_n \cdot b_n = c$, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$

(iv) Wähle $a_n := n$, $b_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^n \cdot \frac{1}{n}] = 0$

Weiter ist $a_n \cdot b_n = n \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n$, so daß

$(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt [mit Werten in $\{-1, 1\}$]

aber nicht konvergent ist [da $a_n b_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$]

(b) Wähle $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Nach Vorlesung divergiert die Folge, da sie unbeschränkt ist [Divergenz in dem Sinne, daß sie nicht gegen eine reelle Zahl konvergiert].

Es gilt aber $x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$

Wegen $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. $\square$

3. Aufgabe

(a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $a \neq 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ f.a. $n \geq n_0$

Daraus folgt insbesondere $|a_n| \geq \frac{|a|}{2}$ f.a. $n \geq n_0$.

Weiterhin existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon |a|^2}{2}$ f.a. $n \geq n_1$

Es gilt nun f.a. $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n \cdot a} \right| = \frac{1}{|a_n| |a|} |a_n - a|$$
$$< \frac{2}{|a|^2} \cdot \frac{\epsilon |a|^2}{2} = \epsilon$$

Damit ist gezeigt, daß $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

(6) Da $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n \neq 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt $a_n > 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Es wird gezeigt, daß $\frac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}$, unendlich gegen ∞ konvergiert.

Dazu wird gezeigt

(i) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

Dies ist klar, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist $\left[\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \text{ für positive Folgen} \right]$

(ii) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt

Bew. Sei also $M > 0$ vorgegeben

Da $a_n, n \in \mathbb{N}$, Nullfolge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \frac{1}{M}$ f.a. $n \geq n_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} > M \text{ f.a. } n \geq n_0$$

Da $M > 0$ beliebig gewählt war, folgt, daß $\left\{ \frac{1}{a_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ unbeschränkt ist.

Zusammen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

(x) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Da $x_n, n \in \mathbb{N}$, gegen x konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
 $|x_n - x| < \varepsilon$ f.a. $n \geq n_0$.

Es genügt nun zu zeigen, daß

$$(*) \quad ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \text{ f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ gilt}$$

Denn dann gilt f.a. $n \geq n_0$

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

Bew. von (*)

(*) ist gleichbedeutend zu

$$-|x_n - x| \stackrel{(1)}{\leq} |x_n| - |x| \stackrel{(2)}{\leq} |x_n - x| \quad (**)$$

Bew. von (1):

Es gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|x| = |x_n + (x - x_n)| \leq |x_n| + |x - x_n| = |x_n| + |x_n - x|$$

$$\text{also } -|x_n - x| \leq |x_n| - |x|$$

Bew. von (2):

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x|$$

$$\text{d.h. } |x_n| - |x| \leq |x_n - x|$$

Damit ist (**) gezeigt, also auch (*).

Insgesamt ist gezeigt: $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$. $\square$

4. Aufgabe

(a) Sei p der Zinssatz. Setze $x := 1+p$.

Es gilt

$$3000x^2 + 4000x + 2500 = 9802,70$$

$$\Leftrightarrow 3000x^2 + 4000x - 7302,70 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - 2,434 = 0$$

Die Nullstellen des letzten Polynoms sind

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 2,434} = -\frac{2}{3} \pm 1,697$$

$$\rightarrow x_1 = 1,03$$

x_2 ist negativ und kann deswegen nicht als Lösung des Problems in Frage kommen.

Also ist $x = 1,03$ und $p = 0,03$.

(b) Es gilt

$$B \left[\frac{(1,04)^2 \cdot (1,035)^2 + 1,04 \cdot (1,035)^2 + (1,035)^2 + 1,035}{\approx 4,3789} \right] = 32842,02$$

$$\Rightarrow B \approx \frac{32842,02}{4,3789} \approx 7500$$

(c) Es gilt

$$2000 \cdot 1,05^8 + 4000 \cdot 1,05^{8-n} = 8060,04$$

$$\Rightarrow 4000 \cdot 1,05^{8-n} = 5105,13$$

$$\Rightarrow 1,05^{8-n} = 1,276$$

$$\Rightarrow 8-n = \log_{1,05}(1,276) = \frac{\ln(1,276)}{\ln(1,05)} = 5$$

$$\Rightarrow n = 3$$

Die zweite Summe wurde also nach 3 Jahren eingezahlt.