

- 1 -

Serie 6 - Musterlösung

1. Aufgabe

(a) Setze für $n \in \mathbb{N}$ $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$

Die Konvergenz der Reihe bedeutet, daß

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Als Teilfolge von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $(s_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Limes.
Es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) = 0$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

(b) (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$ ist zu untersuchen

Zunächst ist f.a. $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{n^2}{2^n + n} \leq \frac{n^2}{2^n}$$

Deshalb genügt es nach dem Majorantenkriterium zu zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert.

Setze $a_n := \frac{n^2}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

Der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$ konvergiert gegen 1 und damit $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen $\frac{1}{2}$. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß f.a. $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{4}$ gilt.

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und damit dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+4}}$.

(ii) Es gilt $\frac{n!}{3^n} = \frac{n!}{27^n}$. Setze $a_n := \frac{n!}{27^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es wird gezeigt, daß $\frac{n!}{27^n}$ keine Nullfolge ist und somit nach Teil (a) nicht konvergieren kann. Dazu wird gezeigt, daß $\frac{n!}{27^n}$ ab einem gewissen Index streng monoton wächst [so daß $\frac{n!}{27^n}$ als positive Folge nicht gegen 0 konvergiert].

Es ist f.a. $n \geq n_0 := 27$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{27^{n+1}} \cdot \frac{27^n}{n!} = \frac{n+1}{27} > 1$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ab $n_0 = 27$.

Damit: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

(iii) Es ist $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \leftarrow$ siehe letzte Serie

In Serie 5, Aufg. 1 (b) wurde gezeigt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq 2^n \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt $0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq 2^{-n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert [geometrische Reihe I], folgt mit dem Majorantenkriterium, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergiert.

(iv) Setze $a_n := \frac{n+1 + \frac{10}{n}}{(n+2)^3}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Da $\frac{10}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 0 konvergiert, existiert

$n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $n+1 + \frac{10}{n} \leq n+2$ f.a. $n \geq n_0$

Damit gilt für $n \geq n_0$

$$0 \leq a_n \leq \frac{n+2}{(n+2)^3} = \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach Vorlesung konvergiert,
konvergiert nach dem Majorantenkriterium
ebenfalls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Aufgabe

(a) Es gilt nach der Bernoulli-Ungleichung f.a. $y \geq -1$
und alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1+y)^n \geq 1+ny$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\frac{x}{n} \geq -1 \quad \text{f.a. } n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt nun

$$(1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1+x$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \exp(x) [= e^x]$ gilt,

$$\text{folgt} \quad \exp(x) \geq 1+x \quad (*)$$

Für die Funktion $1+x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt offenbar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) = \infty, \text{ denn sei } M > 0 \text{ beliebig.}$$

Dann gilt f.a. $x \geq M-1$ die Beziehung $1+x \geq M$
Da (*) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

(6)

Wegen $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ gilt offenbar
f.a. $x \geq 0$ $\exp(x) \geq 0$

Wegen $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x}$ ^{f.a. $x \in \mathbb{R}$} gilt sogar
für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) > 0$.

Sei nun $x \leq 0$. Dann ist $-x \geq 0$. Es gilt

$$(**) \quad 0 < e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x} \quad [\text{nach Teil (a) und wegen } 1+x > 0]$$

Offenbar gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 0$, denn:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $x_0 := \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt f.a. $x \geq x_0$

$$1+x \geq 1+x_0 = 1+\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{d.h. } 1+x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{also } \frac{1}{1+x} < \varepsilon$$

Wegen $0 < \frac{1}{1+x} < \varepsilon$ f.a. $x \geq x_0$ folgt

$$\text{f.a. } x \geq x_0 \quad \left| \frac{1}{1+x} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{d.h. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+x} \right) = 0$$

Wegen (**) folgt damit $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, was

wiederrum gleichbedeutend ist mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. □

3. Aufgabe

Sei K_n das Kapital am Ende des n -ten Jahres.

Setze $K_0 := 10.000.000$, $p := 0,05$, $q := 1+p = 1,05$

Es gilt dann die rekursive Beziehung

$$K_{n+1} = (K_n - x) \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beh. $K_n = K_0 \cdot q^n - x \sum_{k=1}^n q^k, \quad n \in \mathbb{N} \quad (*)$

Bew. (per Induktion)

Induktionsanfang: $n=1$

$$K_0 \cdot q^1 - x \cdot q^1 = (K_0 - x) \cdot q = K_1 \quad \checkmark$$

Induktionschluss: Es gelte $K_n = K_0 \cdot q^n - x \sum_{k=1}^n q^k$.

Anwendung der Rekursionsbeziehung liefert

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= (K_n - x) \cdot q = \left(K_0 \cdot q^n - x \left[\sum_{k=1}^n q^k \right] \right) \cdot q \\ &= K_0 \cdot q^{n+1} - x \left(q \cdot \sum_{k=1}^n q^k + q \right) \\ &= K_0 \cdot q^{n+1} - x \sum_{k=1}^{n+1} q^k, \end{aligned}$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung $(*)$ bewiesen.

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt } K_n &= K_0 \cdot q^n - x \sum_{k=1}^n q^k = K_0 \cdot q^n - x \left[\frac{1 \cdot q^{n+1}}{1 \cdot q} - 1 \right] \\ &= K_0 \cdot q^n - x \frac{q^{n+1}}{1 \cdot q} - \frac{x}{1 \cdot q} + x \\ &= q^n \left[K_0 - x \frac{q}{q-1} \right] - \frac{x}{1 \cdot q} + x \end{aligned}$$

Für das Verhalten für K_n bei Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ werden nun 3 Fälle unterschieden:

- 6-
1. Fall $K_0 > x \cdot \frac{q}{q-1}$
 2. Fall $K_0 = x \cdot \frac{q}{q-1}$
 3. Fall $K_0 < x \cdot \frac{q}{q-1}$

Wegen $q = 1,05 > 1$ ergibt sich

1. Fall $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
2. Fall $K_n = -\frac{x}{1-q} + x$, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also konstant
3. Fall $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

(a) Damit der Preis ewig vergeben werden kann, muss der 1. oder der 2. Fall vorliegen. Der Grenzfall ergibt sich also gerade für

$$K_0 = x \cdot \frac{q}{q-1} \quad \text{kein Komma!}$$

$$\text{d.h. } x = K_0 \cdot \frac{q-1}{q} \approx 476.190 \text{ €}$$

[Im 2. Fall gilt dann gerade $K_n = 10.000.000$ für alle $n \in \mathbb{N}$.]

(b) Sei $x = 600.000$

Damit der Preis n -mal ausbezahlt werden kann, muss $K_{n-1} \geq 600.000$ gelten (dann ist automatisch auch $K_n \geq 600.000$ für $n \in \{1, \dots, n-2\}$)

Es wird daher gesetzt $K_{n-1} = 600.000$

$$\Rightarrow 600.000 = (1,05)^{n-1} \left[10.000.000 - 600.000 \cdot \frac{1,05}{0,05} \right] + \frac{600.000}{0,05} + 600.000$$

$$\text{d.h. } 600.000 = - (1,05)^{n-1} \cdot 2.600.000 + 12.600.000$$

$$4,615 = (1,05)^{n-1}$$

$$n-1 = \log_{1,05}(4,615) = \frac{\ln 4,615}{\ln 1,05} \approx 31,34$$

$$n \approx 32,34$$

Da die Folge $K_n, n \in \mathbb{N}$, im 3. Fall [welcher wegen $x > 476.190$ vorliegt] ^{streng} monoton fallend ist, folgt

$$K_{31} > 600.000 \quad \text{und} \quad K_{32} < 600.000$$

$\Rightarrow$ Der Preis kann 32 mal ausbezahlt werden.

(c) Sei $x = 3.800.000$

Es muss gelten $K_2 \geq 3.800.000$

Setze $K_2 = 3.800.000$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} K_2 &= K_0 \cdot q^2 - x \cdot q^2 - x \cdot q \\ &= [K_0 - x] q^2 - x \cdot q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3.800.000 = 6.200.000 q^2 - 3.800.000 q$$

$$\text{d.h.} \quad 0 = q^2 - 0,538 q - 0,538$$

$$q_{1/2} = \frac{0,538}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,538}{2}\right)^2 + 0,538}$$

$$\Rightarrow q \approx 1,147 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Der andere Wert ist negativ} \\ \text{und kommt nicht als} \\ \text{Lösung in Frage} \end{array} \right]$$

Also: der Zinssatz müsste mindestens 14,7% betragen, damit 3 mal ausbezahlt werden kann.

□

4. Aufgabe

Wir berechnen jeweils die am Ende der Laufzeit zurückzahlenden Summen K_i , $i=1,2,3,4$.

Grundkredit:

$$K_1 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0,155}{12}\right)^{12 \cdot 5} \approx 1,5 \cdot 10^6 \cdot 2,1598$$

Carpediem:

$$K_2 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{2}\right)^{2 \cdot 5} = 1,5 \cdot 10^6 \cdot 2,1589$$

Schnellkredit:

$$K_3 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0,14) \cdot (1 + 0,15) \cdot (1 + 0,17) \cdot (1 + 0,18) \cdot (1 + 0,19) = 1,5 \cdot 2,1539$$

Goldgrube:

$$K_4 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0,19) \cdot (1 + 0,17) \cdot (1 + 0,17) \cdot (1 + 0,15) \cdot (1 + 0,14) = 1,5 \cdot 2,1539 \quad [\text{gleiche Faktoren wie für } K_3]$$

Also: Der Investor sollte sich für den Kredit der Goldgrube GmbH oder den der Schnellkredit AG entscheiden.