

-1-

Musterlösung Serie 7

1. Aufgabe

$$K: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

(a) Die allgemeine Form der Kostenfunktion ist

$$K(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{N}$$

Da die Fixkosten 200 € betragen, folgt $c = 200$.

Weiter liegen die Punkte $(28, 340)$, $(72, 956)$

auf dem Funktionsgraphen von K .

Also

$$\text{I} \quad 340 = a \cdot 28^2 + b \cdot 28 + 200$$

$$\text{II} \quad 956 = a \cdot 72^2 + b \cdot 72 + 200$$

$$(*) \quad \text{I}: b = [140 - 784a] \cdot \frac{1}{28} \quad \text{in II}$$

$$\rightarrow 956 = 5184a + \frac{1}{28}[140 - 784a] \cdot 72 + 200$$

Auflösen nach a ergibt:

$$a = 0,125$$

Einsetzen von $a = 0,125$ in $(*)$ ergibt

$$b = 1,5$$

$$\Rightarrow K(x) = 0,125x^2 + 1,5x + 200$$

(b) Für die Umsatzfunktion $U: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ muss gelten

$$U(x) = 14x, \quad x \in \mathbb{N}$$

Damit ergibt sich für die Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} G(x) &:= U(x) - K(x) = -0,125x^2 - 1,5x - 200 + 14x \\ &= -0,125x^2 + 12,5x - 200 \end{aligned}$$

Es werden die Nullstellen von G bestimmt:

$$0 = -0,125x^2 + 12,5x - 200$$

$$0 = x^2 - 100 + 1600$$

$$x_{1/2} = 50 \pm \sqrt{2500 - 1600} \\ = 50 \pm 30$$

Also, da der Graph von G eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt

$$\{x \in \mathbb{N} : G(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{N} : 20 < x < 80\}.$$

□

2. Aufgabe

- f_1 ist vom Typ II

Da der Graph von f_1 eine Gerade ist, folgt $a=b=0$
Weiter ist $d=3$ [Schnittpunkt $(0,3)$ mit der y -Achse]

$$\Rightarrow f_1(x) = cx + 3$$

Weiter gilt: $G(f_1)$ enthält $(4,5 | 0)$

$$\Rightarrow 0 = c \cdot \frac{9}{2} + 3$$

$$c = -3 \cdot \frac{2}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Also } f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 3.$$

- f_2 muss vom Typ III sein, da der Graph eine Polstelle [in $x=3$] besitzt.

$$\Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{x-3} + b, \text{ d.h. } a=-3$$

Zudem gilt $(2,0) \in G(f_2)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2-3} + b$$

$$\text{also } b = 1$$

$$\text{Damit ist } f_2(x) = \frac{1}{x-3} + 1$$

- f_3 ist vom Typ I als periodische Funktion.

(*) Wegen $\min_{x \in D_3} f_3(x) = 0$ und $\max_{x \in D_3} f_3(x) = 3$ muss
[d.h. $\max_{x \in D_3} f_3(x) - \min_{x \in D_3} f_3(x) = 3$]

$c = \frac{3}{2}$ betragen. Da für die Funktion $x \mapsto \sin(bx)$, $b \neq 0$

$\min_{x \in \mathbb{R}} \sin(bx) = -1$ und $\max_{x \in \mathbb{R}} \sin(bx) = 1$ gilt, folgt
[d.h. $\max \dots - \min \dots = 2$]

wieder mit (*) $a = \frac{3}{2}$

Desweiteren ist f_3 π -periodisch, woraus $b = 2$ folgt,
da $x \mapsto \sin x$ 2π -periodisch ist.

Insgesamt $f_3(x) = \frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{2}$.

- f_4 muss vom Typ II sein, da der Verlauf von f_4 dem eines Polynoms entspricht und Typ I und Typ III ausgeschlossen sind | f_4 nicht periodisch $\Rightarrow f_4$ nicht vom Typ I, f_4 besitzt keine Polstelle $\Rightarrow f_4$ nicht vom Typ III

Die folgenden vier Punkte liegen auf $G(f_4)$:

$(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$

Aus $(0, 2) \in G(f_4)$ folgt $d = 2$

Einsetzen der anderen drei Punkte in die Funktionsgleichung liefert:

$$\text{I } 0 = -a + b - c + 2$$

$$\text{II } 0 = a + b + c + 2$$

$$\text{III } 0 = 8a + 4b + 2c + 2$$

-4-

$$\text{I} + \text{II} : \quad 0 = 2b + 4 \\ \text{d.h. } b = -2$$

Damit werden II und III in

$$\text{II} \quad 0 = a + c \quad \leadsto a = -c$$

$$\text{III} \quad 0 = 8a + 2c - 6$$

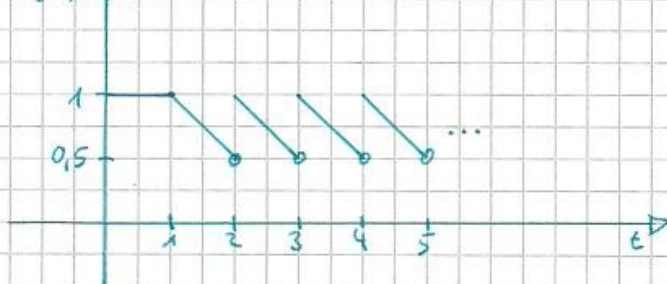
$$a = -c \text{ in II} : c = -1 \text{ und damit } a = 1$$

$$\text{Also ist } f_4(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

□

3. Aufgabe

(a) (i) $f(t)$



(ii)

f ist stückweise linear, wobei die ^{potenziellen} Sprungstellen gerade die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sind.

Da lineare Funktionen (also Funktionen vom Typ $x \mapsto ax + b$) stetig sind, folgt, daß f in $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$ stetig ist.

-5-

f ist zudem an der Stelle $t=1$ stetig, da die Funktion $f_2(t) := \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$ den Wert 1 an der Stelle $t=1$ annimmt und somit der linksseitige Grenzwert $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} f(t) = 1$ mit $f(1)$ übereinstimmt [der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} f(t)$ existiert und ist gleich $f(1)$, da f_2 linear ist!].

Nun wird gezeigt: f ist unstetig in der Menge $\mathbb{N}_{\geq 2}$.

Zunächst ist festzustellen, daß f.a. $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $f(n) = 1$ gilt, denn:

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist $n \leq n < n+1$ (also $k=n$ in der Definition von f wählen) und $f(n) = \frac{n+2-n}{2} = 1$.

Nun wird gezeigt: F.a. $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\lim_{\substack{t \rightarrow n \\ t < n}} f(t) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(n)$

Sei dazu $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = n$ und $t_m < n$ f.a. $m \in \mathbb{N}$.

Es existiert dann ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall m \geq m_0$ $n-1 \leq t_m < n$ gilt. Dann ist $f(t_m) = \frac{n+1-t_m}{2}$

Dieser Ausdruck konvergiert wegen $t_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} n$ gegen $\frac{1}{2}$.

Zusammen: f ist unstetig in $\mathbb{N}_{\geq 2}$ und stetig in $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Mögliche Interpretation des Verlaufs von f :

Der Wert 1 gibt den maximalen Kornvorrat der Mühle an. Diese Vorräte werden dann zum Verkauf angeboten, so daß in gleich großen Zeitintervallen gleiche Vorratsmengen veräußert werden [also linearer Abfall in der Zeit]. Zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ werden die Vorräte durch die Ernte der letzten Saison wieder auf den maximalen Wert aufgefüllt.

$$(G) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ e^x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Die Funktionen $x \mapsto x+1$, $x \mapsto e^x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Aus diesem Grunde genügt es, die Stetigkeit von f in $x=0$ nachzuweisen.

Da $f(0) = e^0 = 1$ ist und $f(x) = e^x$ für $x \geq 0$ gilt und $x \mapsto e^x$ stetig ist, genügt es zu zeigen:

F.ä. Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und $x_n < 0$ f.ä. $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 = f(0)$.

Dies ist aber trivial, denn:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine solche Folge. Dann gilt $f(x_n) = x_n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Damit ist gezeigt, daß f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

4. Aufgabe

(a) (i) Die Funktionen $x \mapsto x^n - 1$ und $x \mapsto x - 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Folglich ist der Quotient dieser Funktionen überall dort stetig, wo der Nenner, also $x - 1$, nicht gleich 0 ist. Dies ist aber nur im Punkt $x=1$ der Fall. Also ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig.

(ii) Bekannt ist, daß für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + \dots + x^{n-1} \quad \text{gilt.}$$

Der Ausdruck $1 + x + \dots + x^{n-1}$ ist in $x=1$ definiert durch $f(1) = n$ und dort sogar stetig, da $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ eine Polynomfunktion ist.

Da f.a. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ gilt, bleibt
^{also}
 f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, wenn man $f(1) := n$ setzt.

(G)(i) Die Funktionen $g_1: x \mapsto \sin x$ bzw. $g_2: x \mapsto \frac{1}{x}$ sind auf
 $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Deshalb ist auch die Verkü-
 ^{$g_1 \circ g_2$}
 npfung dieser beiden Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

(ii) Es wird behauptet, daß man g nicht in 0 so de-
 finieren kann, daß g stetig auf ganz $\mathbb{R}$ wird.

Bew Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f.a. Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a$ gilt.

1. Fall $a \neq 0$

Wähle dann die Folge $x_n, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$x_n := \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Dann ist offenbar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, und es

$$\text{ist } g(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0 \text{ f.a. } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Also } a = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0 \quad \text{für } a \neq 0$$

2. Fall $a = 0$

Wähle dann die Folge $x_n, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$x_n := \frac{2}{\pi + 4n\pi}$$

Dann ist offenbar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Null-
 folge, und es ist $g(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}. \text{ Also } 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 1 \quad \text{für}$$

Damit kann g nicht stetig in $x=0$ fortgesetzt werden.

(C) Die Funktionen $x \mapsto 5x^2 + 7$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto 4x$, $x \mapsto -2$, $x \mapsto -x$ sind alle auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Deshalb ist

$$h(x) = \frac{5x^2 + 7}{(-2 + \cos(4|x|))(e^x - x)} \quad \text{in allen Punkten } x \in \mathbb{R}$$

(*) stetig, in denen der Nenner nicht 0 ist.

Beh. $(-2 + \cos(4|x|))(e^x - x) \neq 0$ [$\overset{\text{tatsächlich}}{< 0}$]
f.a. $x \in \mathbb{R}$

Dies gilt, da

1. $-2 + \cos(4|x|) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
wegen $-1 \leq \cos y \leq 1$ f.a. $y \in \mathbb{R}$

und

2. $e^x - x > 0$ wegen $e^x \geq x+1$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ [siehe letzte Serie oder Vorlesung]
gilt

Damit wird der Nenner im Ausdruck für h nie 0 und h ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und $D = \mathbb{R}$. $\square$

(*) Da h sich als Quotient von Summen und Produkten von Kompositionen (d.h. Verküpfungen) dieser stetigen Funktionen schreiben lässt.

Anhang

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$.
Falls eine eindeutige Zahl $a^- \in \mathbb{R}$ existiert, so daß
für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und
 $x_n \leq x_0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a^-$$

gilt, so nennt man a^- den linksseitigen Grenzwert
von f in x_0 .

Falls eine eindeutige Zahl $a^+ \in \mathbb{R}$ existiert, so daß
für alle Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ und
 $y_n \geq x_0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a^+$$

gilt, so nennt man a^+ den rechtsseitigen Grenzwert
von f in x_0 .

Man sieht sehr schnell mit Hilfe der Definition der
Stetigkeit, dass Folgendes gilt:

f stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ Der linksseitige und
rechtsseitige Grenzwert von f in x_0 existieren und sie
stimmen überein, d.h. $a^- = a^+$.