Musterlösung Serie 8

1. Aufgabe

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 4x + 16$
$= 2[x^2 - 2x + 8]$
$= 2[(x-1)^2 + 7]$

Dieser Darstellung entnimmt man, dass f auf $D_1 := (-\infty, 1]$ streng monoton fallend und auf $D_2 := [1, \infty)$ streng monoton wachsend ist, dass $f: D_1 \to [14, \infty)$,
$f: D_2 \to [14, \infty)$ gilt.

Konstruktion der expliziten Form der Umkehrfunktionen:

Setze $f(x) := y$

Dann gilt

$$y = 2[(x-1)^2 + 7]$$

$$\frac{y}{2} - 7 = (x-1)^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{y}{2} - 7} = x - 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{2} - 7} + 1 \qquad (*)$$

Definiere $f_1 := f|_{D_1}$ [d.h. f_1 ist die Funktion f, die man auf D_1 einschränkt]

$f_2 := f|_{D_2}$ [analog]

Aus $(*)$ folgt $f_1^{-1} : [14, \infty) \to (-\infty, 1],\ f_1^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{2} - 7} + 1$

$f_2^{-1} : [14, \infty) \to [1, \infty),\ f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 7} + 1$

$\square$

2. Aufgabe

(a)

Es wird zunächst per vollständiger Induktion gezeigt, daß gilt:

Für eine Abbiedung $f: A \to B$ zwischen zwei endlichen Mengen A und B gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow |f(A)| = |A|$$

[$|..|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der entsprechenden endlichen Menge]

Beweis von "$\Rightarrow$":

per Induktion nach der Anzahl n der Elemente von A.

Ind. Anf.

Sei $|A| = 1$.

Da A nur ein Element enthält, ist f automatisch injektiv, was uns aber nicht stört. Offenbar ist dann $|f(A)| = 1 = |A|$ ✓

Ind. Schluss

Es gelte die Aussage "f injektiv $\Rightarrow |f(\tilde{A})| = |\tilde{A}|$" für alle Mengen $\tilde{A}$ mit $|\tilde{A}| = n$

Sei nun A eine Menge mit $|A| = n+1$ und $f: A \to B$ injektiv. Dann zerlege A wie folgt: $A = \tilde{A} \cup \{a_0\}$, wobei $\tilde{A} \subset A$ mit $|\tilde{A}| = n$, $a_0 \in A$, $a_0 \notin \tilde{A}$.

Offenbar ist auch die Einschränkung von f auf $\tilde{A}$ injektiv.

Nach Induktionsannahme ist $|f(\tilde{A})| = |\tilde{A}| = n$. Da f injektiv ist, gilt $f(a_0) \neq f(\tilde{a})$ für alle $\tilde{a} \in \tilde{A}$. Also ist $|f(A)| = |f(\tilde{A})| + 1 = n+1$, womit $|f(A)| = |A|$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beweis von "$\Leftarrow$":

Beweis per Kontraposition, d.h. es wird gezeigt

$$f \text{ nicht injektiv} \Rightarrow |f(A)| < |A|$$

Da eine Abbildung höchstens genauso viele Bilder wie Urbilder besitzt, ist stets $|f(A)| \leq |A|$ erfüllt. $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$ sei die Menge der Bilder der Menge $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit $|A| = n$. Ist f nicht injektiv, so ex. $k, l \in \mathbb{N}, k \neq l, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $f(a_k) = f(a_l)$.

$$\Rightarrow \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} \setminus \{f(a_l)\}$$

$$\Rightarrow |f(A)| \leq |A| - 1.$$

(i) Sei jetzt $M := \{1, 2, \dots, n+1\}$, $N := \{1, 2, \dots, n\}$.

Ang. Es gibt eine injektive Funktion $f: M \to N$

Nach dem eben Gezeigten gilt dann

$$|f(M)| = |M| = n+1$$

Da aber $f(M) \subset N$ ist, ist ebenfalls $|f(M)| \leq n$ ↯

Also existiert keine injektive Abbildung $f: M \to N$.

(ii) Ang.: Es existiert eine surjektive Abbildung $g: N \to M$.

Einerseits gilt $|g(N)| \leq |N| = n$, andererseits ist $g(N) = M$ und damit $|g(N)| = |M| = n+1$ ↯

Damit existiert ein solches g nicht.

(b) Seien nun M und N endliche Mengen mit $|M| = |N|$ und $f: M \to N$ eine Funktion.

Zeige "f injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv":

Sei also f injektiv. Dann ist $|f(M)| = |M|$. Da $|M| = |N|$ gilt, folgt $|f(M)| = |N|$, was wiederum unter Beachtung von $f(M) \subset N$ bedeutet, daß $f(M) = N$ gilt. Also ist f surjektiv.

"f surjektiv $\Rightarrow$ f injektiv":
Sei also f surjektiv. Dann gilt $f(M) = N$, also auch $|f(M)| = |N| = |M|$, womit f injektiv ist.

Die übrigen Implikationen sind nun trivial:
Sei f surjektiv. Dann ist, wie eben gezeigt, f injektiv und insgesamt bijektiv.

Sei f bijektiv. Dann ist f nach Voraussetzung surjektiv.

$\square$

3. Aufgabe

(a) "$\Rightarrow$":

Sei f injektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in f(M)$ genau ein x mit $f(x) = y$. (*)

Definiere nun die Funktion $g: N \to M$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ gemäß } (*), & \text{falls } y \in f(M) \\ \text{beliebiges Element aus } M, & \text{falls } y \notin f(M). \end{cases}$$

Sei nun $x \in M$. Dann gilt offenbar $f(x) \in f(M)$. Also ist $g(f(x)) = x$, da für $y := f(x)$ x dasjenige Element aus M ist, das (*) erfüllt.

"$\Leftarrow$" Es gebe eine Funktion $g: N \to M$ mit $g(f(x)) = x$ f.a. $x \in M$.

<u>Ang.</u> f ist nicht injektiv. Dann gibt es $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$, so daß $f(x_1) = f(x_2)$.

Dann kann aber nicht

$$g(f(x_1)) = x_1 \text{ und } g(f(x_2)) = x_2$$

gelten, da $x_1 \neq x_2$ und $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ gilt. $\lightning$

Also ist f injektiv.

(b) "$\Rightarrow$"

Sei f surjektiv. Dann gibt es für alle $y \in N$ (mindestens) ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Für jedes
(*) $y \in N$ sei stets ein $x \in M$ so gewählt, dass $f(x) = y$ gilt.

Definiere $h: N \to M$ durch $h(y) := x$, wobei $y \in N$ und x gemäß (*) gewählt ist. Dann gilt für $y \in N$ $\quad f(h(y)) = f(x) = y$.

"$\Leftarrow$":

Es gebe eine Funktion $h: N \to M$ mit $f(h(y)) = y$ für alle $y \in N$.

Wir zeigen, dass f dann surjektiv sein muss.

Sei also $y \in N$ vorgegeben. Wähle $x := h(y) \in M$. Dann gilt $f(x) = f(h(y)) = y$. Also ist $y \in f(M)$ und f ist surjektiv.

(c) Sei f bijektiv und $g: N \to M$ mit $g(f(x)) = x$ f.a. $x \in M$.

Zu zeigen: $g = f^{-1}$

1. Lösung

Nach Vorlesung ist f^{-1} die eindeutige Funktion von N nach M, die jedes $y \in N$, das das eindeutige Bild eines Elementes $x \in M$ unter f ist, "zurück" auf das x abbildet.

Offenbar ist diese Eigenschaft von g für alle $y \in f(M)$ erfüllt wegen $g(f(x)) = x$ f.a. $x \in M$.

Da f bijektiv ist, gilt $f(M) = N$. Damit ist $g = f^{-1}$.

2. Lösung

Man kann die inverse Funktion $f^{-1}: N \to M$ durch die folgende Eigenschaft definieren: F.a. $x \in M$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ (1) und für alle $y \in N$ gilt $f(f^{-1}(y)) = y$. (2)

Da (1) von g erfüllt wird, zeigen wir nur noch (2):

Sei $y \in N$. Da f bijektiv ist, existiert ein eindeutiges $x \in M$ mit $f(x) = y$. Dann gilt $g(y) = g(f(x)) = x$.

Damit ist $f(g(y)) = f(x) = y$. Insgesamt folgt $g = f^{-1}$.

4. Aufgabe

(a) Wir beweisen diese Teilaufgabe nur explizit für den Fall von Asymptoten von f in Richtung ∞. Der Fall "$-\infty$" verläuft völlig analog.

(i) Sei $g(x) = px + q$, $p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$, schräge oder horizontale Asymptote von f in Richtung ∞.

Dann gilt also

$$\lim_{x \to \infty} \{ f(x) - (px + q) \} = 0$$

Da $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 strebt, folgt mit der Übertragung der Grenzwertregeln für Folgen auf Funktionen

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{1}{x} \left[f(x) - px - q \right] \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \{ f(x) - px - q \}$$

$$= 0$$

Damit gilt

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - p - \frac{q}{x} \right\} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} - p - \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{q}{x}}_{=0} = 0$$

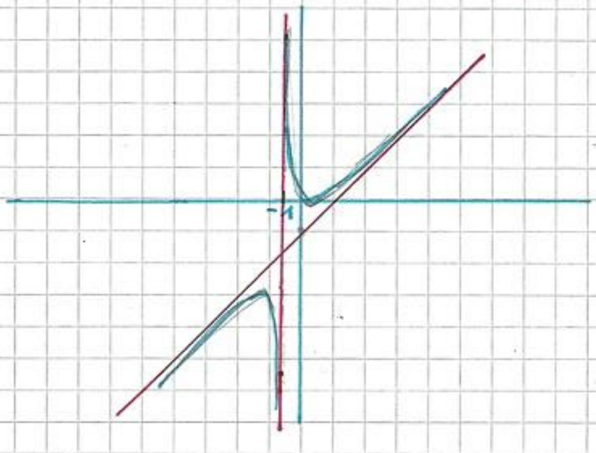
Also $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = p$

(ii) Dies ist trivial, denn:

$$0 = \lim_{x \to \infty} \{ f(x) - px - q \} = \lim_{x \to \infty} \{ f(x) - px \} - \lim_{x \to \infty} \{ q \}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \{ f(x) - px \} = q$$

(b) Die Funktion $f(x)$ ist in $x=-1$ nicht definiert, da der Nenner des Ausdrucks für f dort gleich 0 ist. Für alle übrigen $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist f definierbar. Der maximale Definitionsbereich ist also $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



(c) Es liegt eine vertikale Asymptote in $x=-1$ vor: Es gilt nämlich

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty$

Beweis von (1):

Sei $x < -1$ angenommen und $M < 0$ beliebige Schranke. Es gilt dann

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1} < M$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1) > M(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - (M+1)x - M > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - Mx - x - M > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\substack{\to 1 \\ \text{falls} \\ x \to -1 \\ x < -1}} \underbrace{- Mx - M}_{\substack{\to 0 \\ \text{falls } x \to -1 \\ \text{mit } x < -1}} \underbrace{- x}_{\substack{\to 1 \\ \text{falls } x \to -1 \\ x < -1}} > 0$$

Der Ausdruck $x^2 - Mx - M - x$ konvergiert für $x \to -1$, $x < -1$, gegen 2. Daher existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß f.a. $x < -1$ mit $|x - (-1)| < \varepsilon$ $x^2 - Mx - M - x > 0$ gilt. Für solche x gilt dann auch $f(x) < M$.

Beweis von (2):

Sei $x > -1$ angenommen und $C > 0$ beliebige Schranke. Es gilt dann

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1} > C$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1) > C(x+1)$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - Cx - C - x > 0$$

Der Ausdruck $x^2 - Cx - C - x$ konvergiert für $x \to -1$, $x > -1$, gegen 2. Wie oben kann gefolgert werden, daß ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ existiert mit $f(x) > M$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ mit $|x - (-1)| < \varepsilon$

Also $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty$.

Es wird nun behauptet, dass die Gerade $g(x) = x-2$ schräge Asymptote von f sowohl in ∞-Richtung als auch in $(-\infty)$-Richtung ist.

Es gilt $\frac{f(x)}{x} = \frac{x(x-1)}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1}$

Der Ausdruck $\frac{x}{x+1}$ strebt sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$ gegen 1.
Der Ausdruck $-\frac{1}{x+1}$ strebt in beiden Fällen gegen 0.
Damit gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Weiter ist

$$f(x) - x = \frac{x(x-1)-(x+1)\cdot x}{x+1} = \frac{-2x}{x+1} = -2\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\substack{\to -2 \\ \text{für } x\to-\infty \\ \text{und für } x\to\infty}}$$

Also $\lim_{x\to\infty} \{f(x) - x\} = -2$ und

$$\lim_{x\to-\infty} \{f(x) - x\} = -2 .$$

Daraus folgt unmittelbar $\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0$
und $\lim_{x\to-\infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0$.

Damit sind alle Asymptoten gefunden [Es könnte sonst nur noch vertikale Asymptoten geben. Da $x=-1$ aber die einzige Polstelle von f ist, gibt es diese nicht].

Bemerkung: Führt man eine Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - x) : (x+1) = x - 2 + \frac{2}{x+1} \\
\underline{x^2 + x} \\
\quad -2x \\
\quad \underline{-2x - 2} \\
\qquad 2
\end{array}
$$

durch, so kann man sehr leicht an dieser gewonnenen Darstellung $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$ das asymptotische Verhalten von f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ ablesen. Unter Beachtung von $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x+1} = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$, sieht man, daß $g(x) := x - 2$ Asymptote von f in ∞-Richtung und $(-\infty)$-Richtung ist.