1. Aufgabe Musterlösung Serie 9

(a) (i) Damit $\log_7(x^2-3x+3)$ definiert ist, muss $x^2-3x+3>0$ gelten

Setze $x^2-3x+3=0$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}-3}_{<0}}$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Nullstellen

Da für $f(x):=x^2-3x+3$ $f(0)=3$ gilt, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $f(x)>0$ f.a. $x\in\mathbb{R}$ gilt.

Damit ist $\log_7(x^2-3x+3)$ f.a. $x\in\mathbb{R}$ definiert.

Sei nun $\log_7(x^2-3x+3)=0$ $(*)$

Die Funktion $\log_7 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv mit $\log_7(y)=0$ genau dann, wenn $y=1$ gilt.

Aus $(*)$ folgt nun

$$
\begin{aligned}
& x^2-3x+3 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-3x+2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x-2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x=1 \text{ oder } x=2
\end{aligned}
$$

Damit $\{x\in\mathbb{R} : x \text{ erfüllt } (*)\} = \{1,2\}$

(ii) Sei $3^x + 2^{2x-2} = 2^{2x}$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 3^x + 2^{2x}\left(\frac{1}{4}-1\right) = 0 \quad \left[2^{-2}=\frac{1}{4}\right] \\
\Leftrightarrow\ & 3^x = 4^x\left(1-\frac{1}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \ln(3^x) = \ln\left(4^x\cdot\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot \ln 3 = x \cdot \ln 4 + \ln \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x \{ \ln 3 - \ln 4 \} = \ln \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 3 - \ln 4} = \dfrac{\ln \frac{3}{4}}{\ln \frac{3}{4}} = 1$

Also $\{ x \in \mathbb{R} : 3^x + 2^{2x-2} = 2^{2x} \} = \{1\}$

(b)

(i) Die Gleichung ist nicht für alle $a, b, c > 0$ erfüllt, denn

Wähle $a := 1,\ b := 1,\ c := 1$

Dann gilt

$\ln\left(\frac{a+b}{c}\right) = \ln 2 > 0$

$\ln a + \ln b + \ln c = 0 + 0 + 0 = 0$

(ii) Es wird gezeigt, daß die Gleichung für alle $a, b, c > 0$ gilt.

Es ist

$\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{a} + 1 = \ln\Big(\overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}^{=1}\Big) + 1$

$= \ln 1 + 1 = 1 = \log_c(c)$

[Es gilt nämlich $c^1 = c \Leftrightarrow 1 = \log_c(c)$]

(iii) Es wird gezeigt, daß die Gleichung für alle $a > 1,\ b > 0$ gilt.

Es ist

$\ln\big(\ln(a^b)\big) = \ln\big(b \cdot \ln(a)\big) = \ln b + \ln(\ln(a)).$

2. Aufgabe

(a) $f(x) = e^x$, $P = (0,1)$

Allgemein gilt für die Tangente einer im Punkte x_0 diff'baren Funktion $\tilde{f}$

$t(x) = \tilde{f}'(x_0)[x - x_0] + \tilde{f}(x_0)$ [Schule]

Es ist $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \rightsquigarrow f'(0) = 1$

Damit gilt für die Tangente an f in $x_0 = 0$

$t(x) = x + 1$

(b) Sei $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$

Dann ist g in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ auch diff'bar mit

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

Damit $g(x_0) = \frac{1}{2}$

$g'(x_0) = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung an g in $x_0 = 2$

$t(x) = -\frac{1}{4}[x - 2] + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4}x + 1$

3. Aufgabe

(a) Seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Setze $a := \frac{x+y}{2}$, $b := \frac{x-y}{2}$

Dann gilt $x = a + b$

$y = a - b$

Damit

$\sin x = \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$\sin y = \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos x = \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos y = \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Subtraktion der "Sinusformeln" ergibt

$$\sin x - \sin y = 2 \cos a \cdot \sin b = 2 \cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

Subtraktion der "Cosinusformeln" ergibt

$$\cos x - \cos y = -2 \sin a \cdot \sin b = -2 \sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Es gilt dann nach (a)

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$
$$= \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2})}{h} = \underbrace{\cos\left(x+\tfrac{h}{2}\right)}_{\substack{h \to 0 \\ \longrightarrow \cos x, \\ \text{da } x \mapsto \cos x \\ \text{stetig}}} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\substack{\xrightarrow{h \to 0} 1 \\ \text{nach Vor-} \\ \text{lesung}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos x,$$

d.h. $(\sin x)' = \cos x$

Sei wieder $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit (a) folgt dann

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \underbrace{-\sin\left(x+\tfrac{h}{2}\right)}_{\substack{\xrightarrow{h\to 0} -\sin x \\ \text{da } x \mapsto \sin x \text{ stetig}}} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{h/2}}_{\xrightarrow{h \to 0} 1}.$$

Also $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$
und damit $(\cos x)' = -\sin x$. $\square$

4. Aufgabe

(a)

(i) $f(x) = x^2 \cdot e^x \quad , \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$

(ii) $f(x) = x^x \quad , \; f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x}$

$f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left\{ 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right\}$

$= x^x \cdot \left\{ \ln x + 1 \right\}$

(iii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad , \; f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

(iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin(x)}{\ln(x)} \quad , \; f: \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x) - \sqrt{x} \cos(x)}{(\ln(x))^2}$$

(v) $f(x) = \sqrt{e^{x^2+x+1}} \quad , \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{x^2+x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{x^2+x+1} \cdot \left\{ 2x + 1 \right\}$$

$$= \left\{ x + \frac{1}{2} \right\} \sqrt{e^{x^2+x+1}}$$

(b) Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = (1+x)^n$ [setze also $a := 1$ in der Formel]

Betrachte die beiden Ausdrücke als Funktion in $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} x^k = (1+x)^n \quad , \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Dann ergibt sich durch Ableiten

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1} + (1)' = n(1+x)^{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Da diese Beziehung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, können wir insbesondere $x=1$ einsetzen und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n\, 2^{n-1}$$

Einsetzen von $x=-1$ ergibt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = n(1-1)^{n-1} = 0 \quad .$$