# Musterlösung Serie 3

## Aufgabe 1)

Widerspruchsbeweis:

Ang. $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}$ (da $\sqrt{3} > 0$) mit

$\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ und $n, m$ sind teilerfremd ("gekürzte Darstellung")

also $3 = \frac{n^2}{m^2} \iff 3m^2 = n^2 \quad (*)$

Also ist $n^2$ durch 3 teilbar, damit ist $n$ durch 3 teilbar (Beweis siehe weiter unten).

Es existiert damit $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3k$

Einsetzen in $(*)$:

$$3m^2 = (3k)^2 = 9k^2$$
$$m^2 = 3k^2$$

Also ist $m^2$ durch 3 teilbar und damit wieder $m$ durch 3 teilbar. Insgesamt sind also sowohl $n$ als auch $m$ durch 3 teilbar $\lightning$ zu $n, m$ teilerfremd

Beh. F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2$ durch 3 teilbar $\Rightarrow$ $n$ durch 3 teilbar

Bew. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2$ durch 3 teilbar

Ang. $n$ ist nicht durch 3 teilbar

Dann ex. $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \{1, 2\}$ mit $n = 3k + a$

Weiter ist $n^2 = (3k+a)^2 = 9k^2 + 6ak + a^2$

$$= \underbrace{\underbrace{3(3k^2 + 2ak)}_{\text{durch 3 teilbar}} + \underbrace{a^2}_{\substack{\in \{1,4\} \\ \text{nicht durch 3 teilbar}}}}_{\text{nicht durch 3 teilbar}}$$

Also ist $n^2$ nicht durch 3 teilbar $\lightning$

Aufgabe 2)

(a) Division wie in der Schule gelernt:

$$2 : 9 = 0,\overline{2}$$ Schuldivision

$$6 : 13 = 0,\overline{461538}$$

(b) Sei $x = -0,\overline{7}$

Es gilt dann $10x = -7 - x$

$$9x = -7$$

$$\underline{x = -\frac{7}{9}}$$

Sei $y = 3,52\overline{789}$

Es gilt $100y = 352,\overline{789} = 352 + \underbrace{0,\overline{789}}_{z:=}$

Zudem $1000z = 789,\overline{789} = 789 + z$

$$999z = 789$$

$$z = \frac{789}{999}$$

$$\Rightarrow 100y = 352 + \frac{789}{999}$$

$$y = \frac{1}{100}\left(352 + \frac{789}{999}\right)$$

$$= \frac{352437}{99900}$$

(c) • Nach Aufgabe 1 ist $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es ist aber $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \in \mathbb{Q}$

Wähle also $a = b = \sqrt{3}$

• Wähle $a = \sqrt{3}$, $b = -\sqrt{3}$.

Dann ist $a + b = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}$

Aufgabe 3 )

(a) • $\sum_{k=1}^{10} \frac{a^{2k}}{5^k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{(a^2)^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{a^2}{5}\right)^k \overset{q:=\frac{a^2}{5}}{=} \frac{1-\left(\frac{a^2}{5}\right)^{11}}{1-\frac{a^2}{5}} - 1$

$$\frac{1-\left(\frac{a^2}{5}\right)^{11} - \left(1-\frac{a^2}{5}\right)}{1-\frac{a^2}{5}} = \frac{\frac{a^2}{5} - \left(\frac{a^2}{5}\right)^{11}}{1-\frac{a^2}{5}}$$

• $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{k^2} - \sum_{j=8}^{16} \frac{1}{(j-2)^2} = \sum_{k=4}^{12} \frac{1}{k^2} - \sum_{j=6}^{14} \frac{1}{j^2}$

$= \sum_{k=6}^{12} \frac{1}{k^2} - \sum_{j=6}^{12} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{13^2} - \frac{1}{14^2}$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{169} - \frac{1}{196} \approx 0{,}091$

• $\sum_{\ell=0}^{50} x_{75-\ell} - \sum_{j=24}^{74} x_j = \sum_{\ell=0}^{50} x_{75-\ell} - \sum_{j=24}^{74} x_j = \sum_{k=25}^{75} x_k - \sum_{j=24}^{74} x_j$

$= x_{75} - x_{24}$

• $\sum_{k=1}^{n} (k-a)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2ak + a^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} a^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2a \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n a^2$

**Weiter zu vereinfachen.**

(b) Sei $K$ der Wert des Bankkontos nach 10 Jahren (also am Ende des 10. Jahres).

Es gilt $K = \sum_{k=1}^{10} 120.000 \cdot (1{,}03)^k = 120.000 \cdot \sum_{k=1}^{10} (1{,}03)^k$

$= 120.000 \cdot \left[ \frac{1 - 1{,}03^{11}}{1 - 1{,}03} - 1 \right] \approx 120.000 \cdot 11{,}808 = \underline{\underline{1416.935{,}48}}$

Der Wert $K$ beträgt also ungefähr 1.416.935,48 €.

Aufgabe 4)

(a) • $(a+b)^9 = \sum_{k=0}^{9} a^k b^{9-k}\binom{9}{k}$

$= 1\cdot a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5$

$+ 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + 1\cdot b^9$

• $\left(2\frac{c}{d} - e^2\right)^5 = 1\cdot\left(2\frac{c}{d}\right)^5 + 5\left(2\frac{c}{d}\right)^4(-e^2) + 10\left(2\frac{c}{d}\right)^3(-e^2)^2$

$+ 10\left(2\frac{c}{d}\right)^2(-e^2)^3 + 5\left(2\frac{c}{d}\right)(-e^2)^4 + 1\cdot(-e^2)^5$

$= 2^5\frac{c^5}{d^5} - 5\cdot 2^4\frac{c^4}{d^4}e^2 + 10\cdot 2^3\frac{c^3}{d^3}e^4 - 10\cdot 2^2\frac{c^2}{d^2}e^6 + 10\frac{c}{d}e^8 - e^{10}$

(b) (i) Sei $q \in \mathbb{R}\setminus\{1, -1\}$

Es gilt dann

$(1-q^2)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} q^{2k} - q^2\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} q^{2k} - \sum_{k=0}^{n} q^2\cdot q^{2k}$

$= \sum_{k=0}^{n} q^{2k} - \sum_{k=0}^{n} q^{2k+2} = \sum_{k=0}^{n} q^{2k} - \sum_{\ell=1}^{n+1} q^{2\ell}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n} q^{2k} - \sum_{\ell=1}^{n} q^{2\ell} - q^{2n+2} = 1 - q^{2n+2}$

Damit erhält man $(1-q^2)\sum_{k=0}^{n} q^{2\ell} = 1 - q^{2n+2}$ $\quad |:(1-q^2)$ [$\neq 0$, da $q \notin \{-1,1\}$]

$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$ □

(ii) Es gilt $\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k \underset{\text{Seite 1, Aufg. 1}}{\overset{\tilde q := q^2}{=}} \frac{1-\tilde q^{\,n+1}}{1-\tilde q} = \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$

Bedenke $\tilde q \neq 1$, da $q \notin \{1,-1\}$

Vermutung:

$$\sum_{k=0}^{n} q^{mk} = \frac{1-q^{mn+m}}{1-q^m},$$

wobei für $m$ ungerade $q \notin \{1\}$

für $m$ gerade $q \notin \{1,-1\}$ gefordert werden muss.

[Beweis analog zum Fall $m=2$]

□