Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
19. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

10. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 09. Januar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (4+2+2=8 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Ableitung der Umkehrfunktion der Tangensfunktion zu bestimmen, wobei die Tangensfunktion gegeben ist durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\tan'(x) > 0$ und bijektiv ist und folgern Sie daraus die Existenz der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und deren Ableitungsfunktion durch Verweis auf einen Satz aus der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie, dass $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt (*Man schreibt oft* $\tan^2(x)$ *anstelle* $\big(\tan(x)\big)^2$) .

(c) Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Arcustangens

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Aufgabe (1,5+3+2,5=7 Punkte)
Ein Künstler verkauft Lampenschirme aus eigener Herstellung zum Festpreis von 99 Euro pro Stück. Es wird angenommen, dass die Produktionskosten durch die Kostenfunktion $K(x) = \frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{4} + 8x + 250$ gegeben sind, wobei x die produzierte Stückzahl bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion, die Umsatzfunktion U und die Grenzumsatzfunktion.

(b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G und die Grenzgewinnfunktion. Geben Sie die Bereiche an, in denen die Grenzgewinnfunktion positiv bzw. negativ ist. Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn maximal?

(c) Bestimmen Sie näherungsweise die Gewinnschwelle ("break even point"), also den kleinsten positiven Wert x mit $G(x) > 0$. Gehen Sie dabei vom Startintervall $[0, 8]$ aus, in dessen Endpunkten Sie die Vorzeichen von G ermitteln, und führen Sie so oft eine Intervallhalbierung (d.h. das zweite Intervall ist entweder gleich $[0, 4]$ oder $[4, 8]$ zu wählen) durch, bis ein Intervall der Länge 1 erhalten wird, das eine Nullstelle von G enthält. (*Hinweis: Man denke an den Zwischenwertsatz*)

3. Aufgabe (2+4+3=9 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^n \exp(-x)$ für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie im Fall "n gerade" einen veränderten Bildbereich $B \subset \mathbb{R}$ an, so dass $g : \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist, und einen veränderten Definitionsbereich D an, so dass $g : D \to \mathbb{R}$ injektiv mit $g(D) = [0, \infty)$ ist.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } x < \frac{\pi}{6} \\ \cos(x) & \text{für } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \\ -\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } x > \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

4. Aufgabe (3+5=8 Punkte)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten (d.h. geben Sie Bereiche an, in denen die Ableitungsfunktionen positiv bzw. negativ sind) der folgenden Funktionen und prüfen Sie diese auf lokale Extrema. Geben Sie darüber hinaus auch das Verhalten der Funktionen an für $x \to \pm\infty$ und bei Vorliegen von Definitionslücken das Verhalten für $x \to a$, wobei a Definitionslücke einer Funktion ist.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 1$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 \exp(\frac{1}{x})$