Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
09. Januar 2012

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

11. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 16. Januar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2+2+3=7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp(-x^2)$.

(b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos(x)e^{-x}$. Zeigen Sie, dass für die vierte Ableitung von g

$$g^{(4)}(x) = -4\cos(x)e^{-x}$$

gilt.

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für die $n-$te ($n \in \mathbb{N}$) Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{ax+b}$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ gilt.

2. Aufgabe (4+2=6 Punkte)

(a) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei $n-$mal, $n \in \mathbb{N}$, differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass dann für die $n-$te Ableitung des Produktes fg folgende Formel für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

wobei die $0-$te Ableitung einer Funktion die Funktion selbst sei. (*Hinweis: Verwenden Sie die in Serie 2 bewiesene Formel*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.)

(b) Berechnen Sie $(x^3 e^x)^{(2011)}$.

3. Aufgabe (4+3=7 Punkte)

(a) Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \{0, 1, ..., n\}$

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$$

gilt. Bestimmen Sie dazu zunächst alle $k-$ten, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, Ableitungen des Polynoms p und werten Sie anschließend die Ableitungsfunktionen im Punkt $x = 0$ aus.

(b) Verwenden Sie Teil (a), um das Polynom $p(x) = 5(x-1)^5 - 3(x-1)^2 + 7$ in der Form $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ (und explizit berechneten Koeffizienten a_k) darzustellen.

4. Aufgabe (2+2+2+2+2=10 Punkte)
Finden Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cos^2(x)$ *(Hinweis: "Partielles Integrieren")*

(b) $g(x) = \frac{5}{x}\ln(2x)$

(c) $h(x) = \frac{20x^3+20x}{x^4+2x^2+10}$ *(Hinweis: Zähler und Nenner stehen in einer "Ableitungsbeziehung")*

(d) $j(x) = e^{ax+b}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ seien

(e) $k(x) = x\ln(x)$ *(Hinweis: "Partielles Integrieren")*

5. Aufgabe (3,5+2,5=6 Punkte)

(a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei in einem Intervall $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass auf $[1, \infty)$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

gilt.