Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
23. Januar 2012

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

13. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 30. Januar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2+2+2+2=8 Punkte)
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, wobei $a, b \neq 0$

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, wobei $\alpha > 0$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1+x^3}{x^4}$

2. Aufgabe (4+4=8 Punkte)
In dieser Aufgabe soll die dritte Wurzel der Zahl 7 näherungsweise bestimmt werden. Betrachten Sie dazu die Funktion $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 7$, auf die Sie das Newton-Verfahren zur Findung einer Nullstelle anwenden.

(a) Weisen Sie zunächst nach, dass die Voraussetzungen von Satz (23.1) der Vorlesung tatsächlich erfüllt sind, so dass das Konvergieren der Folge der Iterierten bei beliebigem Startwert aus $[1,3]$ sichergestellt ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens, ausgehend vom Startwert $x_0 := 3$, einen Näherungswert x_N für die Nullstelle von f, der eine Genauigkeit von 10^{-10} aufweist (d.h. $|x_N - \sqrt[3]{7}| \leq 10^{-10}$). Nutzen Sie hierfür die Fehlerabschätzung aus Satz (23.1), um zu rechtfertigen, dass die obige Fehlergrenze nicht überschritten wird.

3. Aufgabe (3+5=8 Punkte)

(a) Sei $K : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $K(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3$, eine Kostenfunktion mit $k_0, k_1, k_3 > 0$ und $k_2 < 0$. Zeigen Sie unter Verwendung der bereits in der Vorlesung gezeigten Resultate, dass das Minimum x_3 der variablen Durchschnittskosten D_V im Konvexitätsbereich von K und K_V (wobei K_V die variablen Kosten seien) liegt.

(b) Eine Fabrik stellt Maschinen her, deren Produktionskosten in Abhängigkeit von der hergestellten Stückzahl x durch die Kostenfunktion $K(x) = 250000 + 3000x - 9x^2 + 0,01x^3$ beschrieben wird. Geben Sie die Bereiche an, in denen die Kostenfunktion konkav bzw. konvex ist. Bestimmen Sie desweiteren die Minima der Grenzkostenfunktion und der variablen Durchschnittskosten. (Bonusaufgabe (maximal 3 Zusatzpunkte): Man finde eine Näherungslösung für das Minimum der Durchschnittskosten.)

4. Aufgabe (1+2+1+3=7 Punkte)
Eine reelle Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, I Intervall in $\mathbb{R}$, heißt im **verallgemeinerten Sinne konvex**, falls für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und alle $t \in [0,1]$ die Beziehung

$$g(a + t(b-a)) \leq g(a) + t(g(b) - g(a))$$

gilt. Es lässt sich zeigen, dass im Falle, dass g differenzierbar ist, die verallgemeinerte Konvexität dazu äquivalent ist, dass g' monoton wachsend ist.

Die Einkommenssteuerfunktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, die einem zu versteuernden Einkommen die tarifliche Einkommenssteuer zuordnet (jeweils in Euro), sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 7835 \\ \frac{(x-415)^2}{106000} - \frac{2597}{5} & \text{für } 7835 \leq x < 13135 \\ \frac{(x+39665)^2}{440000} - 5329 & \text{für } 13135 \leq x < 52735 \\ \frac{21x - 403685}{50} & \text{für } 52735 \leq x < 250000 \\ \frac{9x - 311474}{20} & \text{für } x \geq 250000 \end{cases}$$

(a) Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass f stetig ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f auf dem größtmöglichen Definitionsbereich.

(c) Zeigen Sie anhand der ersten Ableitung von f, dass f im verallgemeinerten Sinne konvex ist (Es darf verwendet werden, dass f im verallgemeinerten Sinne konvex ist, wenn endlich viele Nichtdifferenzierbarkeitsstellen vorliegen, f' außerhalb dieser Stellen monoton wächst und in den Nichtdifferenzierbarkeitsstellen links- und rechtsseitige Ableitung von f existieren und die linksseitige Ableitung kleiner oder gleich der rechtsseitigen Ableitung ist).

(d) Beim Ehegattensplitting versteuern beide Ehepartner jeweils die Hälfte der Summe der beiden zu versteuernden Einkommen. Zeigen Sie, dass das Steueraufkommen beim Ehegattensplitting nie höher ist, als wenn beide Ehepartner ihr Einkommen einzeln versteuern.