

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

2. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2011, 10:00 Uhr, O28-H22

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2+3=5 Punkte)

Beweisen Sie per vollständiger Induktion:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für die n -te Ableitung (d.h. die Funktion wird n mal nacheinander abgeleitet) der Funktion $f(x) := x^2 e^x$

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x.$$

2. Aufgabe (2+2=4 Punkte)

Es werden die folgenden drei Behauptungen über zwei Mengen A und B betrachtet:

1. $A \cap B = \emptyset$
2. $A \subset B$
3. $A = \emptyset$

- (a) Aus welchen der drei Behauptungen folgt mindestens eine der beiden anderen Behauptungen?
(b) Welche der drei Behauptungen folgen, wenn beide anderen Behauptungen gelten?

3. Aufgabe (2+3+3=8 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten $\binom{1000}{1000}$, $\binom{1001}{1000}$, $\binom{20}{15}$, $\binom{20}{5}$.
(b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ **mit** $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

- (c) Beweisen bzw. begründen Sie die Identität $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ auf zwei verschiedene Arten:
- Unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes (Beweis).
 - Durch richtige Interpretation von Vorlesungssätzen über die Anzahlen gewisser Teilmengen von gewissen Ausgangsmengen (Begründung).

4. Aufgabe (2+2+3=7 Punkte)

- (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau vier Richtige im "6 aus 49" anzukreuzen?
(b) Wie viele Wege führen auf einem Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke, wenn jeder Schritt eines Weges jeweils in das oben oder rechts angrenzende Feld führt?
(c) Es wird angenommen, dass die Anzahl n der Studenten, die für die Vorlesung "Mathematische Grundlagen der Ökonomie" eingeschrieben sind, geradzahlig ist, etwa $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wie viele mögliche Aufteilungen dieser Menge an Studenten in Zweiergruppen gibt es dann?