Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
31. Oktober 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

3. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 07. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ gilt.

Hinweis: Schauen Sie sich den Beweis für "$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$" aus der Vorlesung an und überlegen Sie sich, wie man ihn modifizieren muss, um die obige Aussage zu zeigen. Falls Sie den zugehörigen Beweis nicht hinbekommen, darf trotzdem verwendet werden, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Implikation "n^2 durch 3 teilbar $\Rightarrow$ n durch 3 teilbar" gilt (Ein Beweis dieser Aussage gibt 2 Punkte).

2. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)

(a) Wandeln Sie die Brüche $\frac{2}{9}, \frac{6}{13}$ in Dezimalzahlen um.

(b) Wandeln Sie die Dezimalzahlen $-0,\overline{7}$ und $3,52\overline{789}$ in Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ um.

(c) Zeigen Sie durch Angabe von Beispielen, dass folgende Aussagen falsch sind:

- $\big(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big) \Rightarrow ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $\big(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big) \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3. Aufgabe (4+2=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie so konkret wie möglich die Werte folgender Summen

- $\sum_{k=1}^{10} \frac{a^{2k}}{5^k}$, wobei $a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{k^2} - \sum_{j=8}^{16} \frac{1}{(j-2)^2}$
- $\sum_{l=0}^{50} x_{r-l} - \sum_{j=24}^{74} x_j$, wobei $r = 75$, $x_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, 2, ..., 75\}$
- $\sum_{k=1}^{n} (k-a)^2$, wobei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

(b) Ein Unternehmen erhält über einen Zeitraum von 10 Jahren jährlich jeweils zu Beginn des Jahres eine Ausschüttung von 120000 Euro. Das Geld, sobald erhalten, wird auf einem Konto mit 3% jährlicher Verzinsung angelegt. Wie groß ist der Wert des Bankkontos am Ende der 10 Jahre?

4. Aufgabe (2+4=6 Punkte)

(a) Es seien $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, wobei $d \neq 0$ gelte. Multiplizieren Sie folgende Ausdrücke aus:

- $(a+b)^9$
- $(2\frac{c}{d} - e^2)^5$

(b) **(i)** Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Identität $\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$, ohne einen Induktionsbeweis durchzuführen.

(ii) Kann man die in (i) gegebene Formel auch unter Verwendung der entsprechenden Formel für $\sum_{k=0}^{n} q^k$ herleiten? Wenn ja, wie funktioniert dieses? Geben Sie anschließend eine Vermutung darüber ab, wie die entsprechende Formel für $\sum_{k=0}^{n} q^{mk}$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ lauten muss.