

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

## 5. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 21. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

**1. Aufgabe** (1,5+1,5+1,5+1,5+1,5=7,5 Punkte)

Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (dann durch Rechnung bzw. Anwendung von Limesregeln begründet):

(a)  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

(b)  $b_n = \binom{2n}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

(c)  $c_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

(d)  $d_n = \frac{n^3}{n! + n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

(e) Für welche Werte  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $e_n = \frac{2^n}{x^n} + \frac{3}{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ?

**2. Aufgabe** (6+2=8 Punkte)

(a) Man gebe jeweils Beispiele reeller Zahlenfolgen  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , und  $b_n, n \in \mathbb{N}$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  an, so dass gilt

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$  für ein fest vorgegebenes  $c \in \mathbb{R}$

(iv)  $(a_n b_n), n \in \mathbb{N}$ , ist beschränkt aber nicht konvergent.

(*Dass die gewählten Folgen die gewünschten Eigenschaften erfüllen, ist stets nachzuweisen.*)

(b) Geben Sie eine reelle Zahlenfolge  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , an, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  und  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , divergiert. (*Hinweis: Man denke an die harmonische Reihe.*)

**3. Aufgabe** (3+2+2=7 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit dem  $\epsilon$ -Kriterium, dass gilt:

Ist  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , eine reelle Zahlenfolge mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die gegen  $a \neq 0$  konvergiert, dann konvergiert die Folge  $\frac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}$ , gegen den Grenzwert  $\frac{1}{a}$ .

(b) Zeigen Sie:

Ist  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , eine monoton fallende Nullfolge mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty$ .

(c) Zeigen Sie:

Ist  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , eine gegen  $x \in \mathbb{R}$  konvergente reelle Zahlenfolge, so konvergiert  $|x_n|, n \in \mathbb{N}$ , gegen  $|x|$ .

**4. Aufgabe** (2+2+2=6 Punkte)

(a) Jemand zahlt drei Beträge auf sein Konto ein: 3000 Euro sofort, 4000 Euro nach einem Jahr und 2500 Euro nach 2 Jahren. Unmittelbar nach der letzten Auszahlung beläuft sich sein Kontostand auf 9802,70 Euro. Wie groß ist der jährliche Zinssatz gewesen?

- (b) Jemand zahlt 4 mal den gleichen Betrag  $B$  auf ein Konto ein: sofort, nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 3 Jahren. Am Ende des dritten Jahres (also nach 4 Jahren) beträgt der Wert des Kontos 32842,02 Euro. Weiterhin ist bekannt, dass der jährliche Zinssatz in den ersten beiden Jahren 4% und in den beiden letzten Jahren 3,5% betrug. Wie groß ist die jährliche Einzahlung  $B$  gewesen?
- (c) Jemand zahlt sofort 2000 Euro ein und nach  $n$  Jahren mit  $n \leq 8$  zahlt er weitere 4000 Euro ein. Der jährliche Zinssatz beträgt 5%. Nach insgesamt 8 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 8060,04 Euro. Wann wurde die zweite Summe eingezahlt?