

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

5. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 21. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (1,5+1,5+1,5+1,5+1,5=7,5 Punkte)

Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (dann durch Rechnung bzw. Anwendung von Limesregeln begründet):

(a) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $b_n = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(c) $c_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{n+10}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $d_n = \frac{n^3}{n! + n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

(e) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $e_n = \frac{2^n}{x^n} + \frac{3}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$?

2. Aufgabe (6+2=8 Punkte)

(a) Man gebe jeweils Beispiele reeller Zahlenfolgen $a_n, n \in \mathbb{N}$, und $b_n, n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ an, so dass gilt

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$ für ein fest vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$

(iv) $(a_n b_n), n \in \mathbb{N}$, ist beschränkt aber nicht konvergent.

(*Dass die gewählten Folgen die gewünschten Eigenschaften erfüllen, ist stets nachzuweisen.*)

(b) Geben Sie eine reelle Zahlenfolge $x_n, n \in \mathbb{N}$, an, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ und $x_n, n \in \mathbb{N}$, divergiert. (*Hinweis: Man denke an die harmonische Reihe.*)

3. Aufgabe (3+2+2=7 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit dem ϵ -Kriterium, dass gilt:

Ist $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen $a \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $\frac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}$, gegen den Grenzwert $\frac{1}{a}$.

(b) Zeigen Sie:

Ist $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty$.

(c) Zeigen Sie:

Ist $x_n, n \in \mathbb{N}$, eine gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente reelle Zahlenfolge, so konvergiert $|x_n|, n \in \mathbb{N}$, gegen $|x|$.

4. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)

(a) Jemand zahlt drei Beträge auf sein Konto ein: 3000 Euro sofort, 4000 Euro nach einem Jahr und 2500 Euro nach 2 Jahren. Unmittelbar nach der letzten Auszahlung beläuft sich sein Kontostand auf 9802,70 Euro. Wie groß ist der jährliche Zinssatz gewesen?

- (b) Jemand zahlt 4 mal den gleichen Betrag B auf ein Konto ein: sofort, nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 3 Jahren. Am Ende des dritten Jahres (also nach 4 Jahren) beträgt der Wert des Kontos 32842,02 Euro. Weiterhin ist bekannt, dass der jährliche Zinssatz in den ersten beiden Jahren 4% und in den beiden letzten Jahren 3,5% betrug. Wie groß ist die jährliche Einzahlung B gewesen?
- (c) Jemand zahlt sofort 2000 Euro ein und nach n Jahren mit $n \leq 8$ zahlt er weitere 4000 Euro ein. Der jährliche Zinssatz beträgt 5%. Nach insgesamt 8 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 8060,04 Euro. Wann wurde die zweite Summe eingezahlt?