

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

## 6. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 28. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

### 1. Aufgabe (2+8=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

Sei  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent. Dann ist  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Nullfolge.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^{3^n}}$

(iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1+\frac{10}{n})}{(n+2)^3}$

*Hinweis zu (iii): Zeigen Sie  $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq 2^{-n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

### 2. Aufgabe (3+3=6 Punkte)

Es sei  $f$  eine reellwertige Funktion, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Wenn folgende Bedingung gilt:

Für alle  $M > 0$  existiert  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \geq x_0$   $f(x) \geq M$  gilt.

Dann schreibt man  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Für  $a \in \mathbb{R}$  schreibt man  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , wenn die Bedingung

Für alle  $\epsilon > 0$  existiert  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \geq x_0$   $|f(x) - a| \leq \epsilon$  gilt.

erfüllt ist. Analog definiert man  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ , wenn die Bedingung

Für alle  $M > 0$  existiert  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \leq x_0$   $f(x) \geq M$  gilt.

und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ , wenn die Bedingung

Für alle  $\epsilon > 0$  existiert  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x \leq x_0$   $|f(x) - a| \leq \epsilon$  gilt.

erfüllt ist.

Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Exponentialfunktion  $\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  für  $x \in \mathbb{R}$ :

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$  (Hinweis: Bernoulli-Ungleichung)

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$  (Hinweis: Teil (a) und Exponentialgesetz)

### 3. Aufgabe (3+3+3=9 Punkte)

Ein Stifter lobt einen Ökonomiepreis aus, der am ersten Tag jedes Jahres vergeben wird und eine gleichbleibende Höhe von  $x$  Euro hat. Das Stiftungskapital beträgt vor der ersten Preisverleihung 10.000.000 Euro.

(a) Wie groß darf  $x$  höchstens sein, wenn das Kapital jährlich mit 5% verzinst wird und der Preis ewig vergeben werden soll?

- (b) Wie oft kann der Preis ausgezahlt werden, wenn er mit 600.000 Euro dotiert wird und die Verzinsung weiterhin bei 5% liegt?
- (c) Welcher Zinssatz wäre nötig, damit der Preis mit 3.800.000 Euro dotiert werden und 3 mal ausgeschüttet werden kann?

**4. Aufgabe** (4 Punkte)

Ein Investor hat in eine Villa in Südkalifornien investiert. Da die Bank ihm seinen Kredit gekündigt hat, muss er sofort einen Betrag in Höhe von 1,5 Millionen US-Dollar zurückzahlen. Diese Summe muss er sich leihen und steht dabei vor der Wahl zwischen vier Krediten mit einer Laufzeit von je 5 Jahren, die nach Ablauf der Laufzeit getilgt werden. Das Angebot der Gönndirwas GmbH hat einen Jahreszins von 15,5% bei monatlicher Verzinsung, die Carpediem AG erhebt einen Jahreszins von 16% und verzinst den Kredit halbjährlich. Die Schnellkredit AG und die Goldgrube GmbH verzinsen jeweils jährlich mit den folgenden Zinssätzen:

	1.Jahr	2.Jahr	3.Jahr	4.Jahr	5.Jahr
Schnellkredit AG	14%	15%	17%	18%	19%
Goldgrube GmbH	19%	18%	17%	15%	14%

Für welchen Kredit sollte der Investor sich entscheiden?