Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
12. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

9. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 19. Dezember 2011, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (4+3=7 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgenden Gleichungen, wobei in (i) zuerst zu ergründen ist, für welche $x \in \mathbb{R}$ der Ausdruck auf der linken Seite überhaupt definiert ist:

(i) $\log_7(x^2 - 3x + 3) = 0$

(ii) $3^x + 2^{2x-2} = 2^{2x}$

(b) Welche der ersten beiden Gleichungen sind für alle a, b, c mit $a, b, c > 0$ erfüllt?

(i) $\ln(\frac{a+b}{c}) = \ln(a) + \ln(b) - \ln(c)$

(ii) $\ln(\frac{a}{b}) + \ln(\frac{b}{c}) + \ln(\frac{c}{a}) + 1 = \log_c(c)$

(iii) Ist die Gleichung $\ln(\ln(a^b)) = \ln(\ln(a)) + \ln(b)$ für alle $a > 1, b > 0$ erfüllt?

(Im Falle, dass eine Gleichung nicht für alle angegebenen Parameterwerte gültig ist, ist ein Gegenbeispiel anzugeben.)

2. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der folgenden Funktionen in den gegebenen Punkten:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = e^x,\ \ P = (0, 1)$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \frac{1}{x},\ \ Q = (2, \frac{1}{2})$

3. Aufgabe (4+4=8 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Ableitungsfunktionen der Sinus- und Cosinusfunktion zu berechnen.

(a) Leiten Sie aus den Additionstheoremen

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\\
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),
\end{aligned}$$

die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten, die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

her.

(b) Zeigen Sie nun unter Anwendung der aus der Vorlesung bekannten Beziehung $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, dass die Sinus- und Cosinusfunktion überall differenzierbar sind und $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

4. Aufgabe (5+4=9 Punkte)

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Funktionen an und berechnen Sie ihre Ableitung in den Punkten des Definitionsbereiches, in denen die Ableitung existiert:

(i) $f(x) = x^2 e^x$

(ii) $f(x) = x^x$ (*Hinweis: Benutzen Sie* $x^x = e^{x\ln(x)}$)

(iii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

(iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\ln(x)}$

(v) $f(x) = \sqrt{e^{x^2+x+1}}$

(b) Beweisen Sie die folgenden Formeln für $n \in \mathbb{N}$

(i) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k} = 0$

(*Hinweis: Benutzen Sie* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k = (a+x)^n$ *für alle* $a, x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$.)