Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften

Gaußsche Prozesse - ein funktionalanalytischer Zugang

Bachelorarbeit

in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von
Clemens Kraus
am 31. Mai 2014

Gutachter

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Markus Kunze

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wer die Finanzmathematik und damit die stochastische Analysis studieren will, für den sind Gaußsche Prozesse unumgänglich. Doch trotz einer Vielzahl von Anwendungen ist es schwer, Literatur zu finden, die einen ausführlichen und mathematisch sauberen Einstieg in die Familie der Gaußschen Prozesse bietet. Daher wird in der folgenden Arbeit der Versuch unternommen, mithilfe funktionalanalytischer Hilfsmittel, genau dieses zu erreichen.

Das Hauptproblem bei der Betrachtung von Gaußschen Prozessen besteht im Beweis ihrer Existenz. So wurde die Brownsche Bewegung, die als der bekannteste und wichtigste Gaußsche Prozess angesehen werden kann, schon 1880 vom dänischen Mathematiker Thorvald Nicolai Thiele beschrieben, ihre Existenz aber erst 1923 durch den Amerikaner Norbert Wiener bewiesen. Wieners Ansatz hat allerdings zwei Nachteile: zum einen ist der Beweis sehr anspruchsvoll und nur schwer zu verstehen und zum anderen deckt er nicht das gesamte Spektrum der Gaußschen Prozesse ab. Wir wollen daher einen Ansatz wählen, der zwar abstrakt ist, uns aber die Existenz der ganzen Familie der Gaußschen Prozesse sichert.

Da bei dem Studium von Gaußschen Prozessen Vorkenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitstheorie vonnöten sind, diese aber nicht vorausgesetzt werden sollen, wollen wir die Arbeit mit grundlegenden Definitionen und relevanten Sätzen aus diesem Gebiet beginnen. Im zweiten Kapitel wird dann die Normalverteiltheit genauer untersucht. Wir wollen hierbei eine zentrierte, normalverteilte Zufallsvariable aber nicht wie üblich über die Verteilung, sondern über die charakteristische Funktion definieren. Am Ende dieses Abschnitts werden dann Gaußsche Prozesse definiert.

Beim Studium von Gaußschen Prozessen erweist sich der Begriff der Kovarianzfunktion als zentral. Diese bestimmt nämlich die endlichdimensionalen Verteilungen - und daher im wesentlichen auch den Gaußschen Prozess - eindeutig. Es stellt sich nun die Frage, welche Eigenschaften muss eine Funktion erfüllen, sodass ein Gaußscher Prozess existiert, der eben diese Funktion als Kovarianzfunktion besitzt. Um das zu beantworten, definieren und studieren wir im dritten Kapitel zunächst die isonormalen Prozesse, mit deren Hilfe dann Gaußsche Prozesse konstruiert werden können. In Kapitel 4 sehen wir dann, dass es ausreicht, dass eine Funktion stetig, symmetrisch und positiv semidefinit ist, um mithilfe der isonormalen Prozesse einen Gaußschen Prozess zu definieren, der genau diese Funktion als Kovarianzfunktion besitzt. Wenn man also einen Gaußschen Prozess über seine Kovarianzfunktion definiert, muss nur nachgeprüft werden, dass sie symmetrisch und positiv semidefinit ist, um die Existenz des Gaußschen Prozesses zu zeigen. Umgekehrt erhalten wir in Satz 4.1.3 außerdem, dass jede Kovarianzfunktion eines Gaußschen Prozesses symmetrisch und positiv semidefinit ist.

Es ist uns nun also möglich, auf recht einfache Art und Weise die Existenz von Gaußschen Prozessen zu gegebener Kovarianzfunktion zu zeigen. Dies wollen wir im fünften Kapitel am Beispiel der oben erwähnten Brownschen Bewegung und der Familie der gebrochenen Brownschen Bewegungen demonstrieren. Außerdem werden einige Besonderheiten der gebrochenen Brownschen Bewegung untersucht. Das Hauptinteresse besteht dabei in dem Nachweis einer Version mit stetigen Trajektorien. Dazu benutzt man den Satz von Kolmogorov, der ein sehr wichtiger Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist, und den wir in Kapitel 5 vollständig beweisen.

Zum Schluss dieser Einleitung will ich im Besonderen darauf hinweisen, dass diese Arbeit maßgeblich auf einem Manuskript von Dr. Markus Kunze aufbaut.

Kapitel 1.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Kapitel wollen wir eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie geben. Im Abschnitt 1.1. werden einige grundlegende Begriffe definiert (Zufallsvektor, Erwartungswert, Varianz). In Abschnitt 1.2. wollen wir die Unabhängigkeit von Zufallsvektoren untersuchen. Im letzten Unterkapitel wird die charakteristische Funktion eines Zufallsvektors definiert und in Relation zur Verteilung und Unabhängigkeit gebracht.

1.1. Zufallsvektor, Erwartungswert und Varianz

Definition 1.1.1. *(Wahrscheinlichkeitsraum, W-Raum)*
Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Sigma-Algebra auf Ω und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, d.h. $\mathbb{P}$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum *oder* W-Raum*.*

Definition 1.1.2. *(Zufallsvektor, Zufallsvariable)*
Eine messbare Funktion $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{B}(\mathbb{C}^n))$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ die Borel-Sigma-Algebra auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet, heißt Zufallsvektor*. Falls n=1 gilt, bezeichnen wir X als* Zufallsvariable*. Bildet X nach $\mathbb{R}^n$ ab, so nennen wir X einen* reellwertigen Zufallsvektor *bzw. eine* reellwertige Zufallsvariable*.*

Bemerkung. Sei X eine Zufallsvariable und k eine natürliche Zahl. Wir schreiben $X \in L^k(\Omega)$, falls $\int_\Omega |X|^k d\mathbb{P} < \infty$.

Definition 1.1.3. *(Verteilung)*
Sei X ein Zufallsvektor und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. *Wir definieren* $\mu_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$ *und nennen* μ_X *die* Verteilung *von X.*

Bemerkung. Es ist bekannt, dass die Verteilung μ_X eines Zufallvektors X ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{C}^n$ ist. Außerdem ist für eine Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ bekannt: $f \in L^1(\mathbb{C}^n, \mu_X)$ genau dann, wenn $f \circ X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ und dann gilt

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(x)\mu_X(dx) = \int_\Omega f \circ X d\mathbb{P}$$

Definition 1.1.4. *(Erwartungswert)*
Für eine Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega)$ *definieren wir*

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

und bezeichnen $\mathbb{E}X$ *als den* Erwartungswert *von X.*

Bemerkung. Der Erwartungswert ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl. Ist allerdings die Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega)$ reellwertig, so ist auch der Erwartungswert reell.

Definition 1.1.5. *(Varianz, Kovarianz)*
Seien $X, Y \in L^2(\Omega)$ *reellwertige Zufallsvariablen. Wir bezeichnen*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

als die Varianz *von X und*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$$

als die Kovarianz *von X und Y. Falls* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ *gilt, so heißen X und Y* unkorreliert.

Lemma 1.1.6. *Seien* $X, Y, Z \in L^2(\Omega)$ *reellwertig sowie* $X_1, ..., X_n \in L^2(\Omega)$ *reellwertig. Des weiteren seien* $a, b \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

(a) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$

(b) $\mathrm{Var}\, X \geq 0$

(c) $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

(d) $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}\, X$

(e) $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$

(f) $\operatorname{Var}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus der Definition. □

Definition 1.1.7. *(Kovarianzmatrix)*
Sei $X = (X_1, .., X_n)$ ein Zufallsvektor mit $X_j \in L^2(\Omega)$ für $j = 1, ..., n$. Wir definieren dann die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $a_{ij} := \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ und nennen sie die Kovarianzmatrix *von X.*

Lemma 1.1.8. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable in $L^2(\Omega)$ mit $\mathbb{E}X = 0$ und $\operatorname{Var} X = 0$. Dann gilt $X = 0$ fast sicher.*

Beweis. Definiere $B := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq 0\}$ und $B_n := \left\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) > \frac{1}{n}\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Da nun $\mathbb{E}X = 0$ gilt, folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit Lemma 1.1.6

$$0 = \operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = \int_\Omega X^2 d\mathbb{P} \geq \int_{B_n} X^2 d\mathbb{P} \geq \frac{1}{n}\mathbb{P}(B_n)$$

Daraus folgt aber, dass $\mathbb{P}(B_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$0 \leq \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$$

Es ist also $\mathbb{P}(B) = 0$ und damit $X = 0$ fast sicher. □

1.2. Unabhängigkeit

Ein wesentlicher Begriff in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der der Unabhängigkeit. Wir definieren ihn wie folgt:

Definition 1.2.1. *(unabhängige Zufallsvektoren)*
Eine Familie von Zufallsvektoren $(X_i)_{i \in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, heißt unabhängig, *falls für jede nichtleere, endliche Menge $J \subset I$ und beliebige $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ mit $j \in J$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in B_j)\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j) \tag{1.1}$$

Bemerkung. Eine Familie von reellwertigen Zufallsvektoren $(X_i)_{i\in I}$ ist genau dann unabhängig, wenn Gleichung (1.1) für jede nichtleere, endliche Menge $J \subset I$ und beliebige $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $j \in J$ erfüllt ist.

Lemma 1.2.2. *Sei $(X_j)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvektoren und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von messbaren Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}$. Dann ist $(f_i(X_i))_{i\in I}$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen.*

Beweis. Seien $J \subset I$ endlich und nichtleer sowie $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ für $j \in J$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}(f_j(X_j) \in B_j)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}(X_j \in f_j^{-1}(B_j))\right) \\ &= \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j \in f_j^{-1}(B_j)) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(f_j(X_j) \in B_j)\end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.3. *Seien $X, Y \in L^1(\Omega)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist auch das Produkt $XY \in L^1(\Omega)$ und es gilt $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.*

Beweis. Es seien nach Voraussetzung X und Y unabhängige Zufallsvariablen.

<u>Beh.1</u>: *Seien X und Y reellwertig. Dann ist $XY \in L^1(\Omega)$ und es gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.*

Wir führen den Beweis per algebraischer Induktion. Seien dazu zunächst X und Y einfache Funktionen, d.h. $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ und $Y = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ mit $a_i, b_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $A_i, B_j \in \mathcal{A}$, wobei die a_i paarweise verschieden und A_i paarweise disjunkt sind und auch b_j paarweise verschieden und B_j paarweise disjunkt sind. Dann ist offensichtlich $XY \in L^1(\Omega)$ und durch die Unabhängigkeit von X und Y folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}XY &= \int_\Omega XY d\mathbb{P} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}\right)\left(\sum_{j=1}^m b_i 1_{B_j}\right) d\mathbb{P} = \int_\Omega \sum_{i,j} a_i b_j 1_{A_i\cap B_j} d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \int_\Omega 1_{A_i\cap B_j} d\mathbb{P} = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{a_i\}) \cap Y^{-1}(\{b_j\})\right) = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{a_i\})\right)\mathbb{P}\left(Y^{-1}(\{b_j\})\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega 1_{A_i} d\mathbb{P}\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j \int_\Omega 1_{B_j} d\mathbb{P}\right) \\ &= \int_\Omega X d\mathbb{P} \int_\Omega Y d\mathbb{P} = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y\end{aligned}$$

Seien nun $X, Y \geq 0$. Wir wissen aus der Maßtheorie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = \min\{\frac{\lfloor 2^n X\rfloor}{2^n}, n\}$ und $Y_n = \min\{\frac{\lfloor 2^n Y\rfloor}{2^n}, n\}$ einfache, monoton wachsende Funktionen sind mit $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ und $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$. Außerdem sind nach Lemma 1.2.2 X_n und Y_n unabhängig, da $\min\{\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}, n\}$ messbar ist. Es folgt aus dem Satz von Beppo-Levi über die monotone Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= \left(\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} X_n \lim_{n\to\infty} Y_n\right) \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_n Y_n d\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n Y_n d\mathbb{P} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mathbb{P}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n d\mathbb{P}\right) \\
&= \left(\int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_n d\mathbb{P}\right)\left(\int_\Omega \lim_{n\to\infty} Y_n d\mathbb{P}\right) \\
&= \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Also ist $XY \in L^1(\Omega)$ und es gilt $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Seien nun X,Y beliebige reellwertige Zufallsvariablen. Es ist $X = X^+ - X^-$ und $Y = Y^+ - Y^-$ mit $X^+, X^-, Y^+, Y^- \geq 0$. Nach Lemma 1.2.2 sind $X^{\pm}$ und $Y^{\pm}$ unabhängig und es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= \mathbb{E}X^+Y^+ + \mathbb{E}X^-Y^- - \mathbb{E}X^-Y^+ - \mathbb{E}X^+Y^- \\
&= \mathbb{E}X^+\mathbb{E}Y^+ + \mathbb{E}X^-\mathbb{E}Y^- - \mathbb{E}X^-\mathbb{E}Y^+ - \mathbb{E}X^+\mathbb{E}Y^- \\
&= \left(\mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-\right)\left(\mathbb{E}Y^+ - \mathbb{E}Y^-\right) \\
&= \mathbb{E}X\mathbb{E}Y
\end{aligned}$$

$\circ$

<u>Beh.2</u>: *Für X und Y komplexwertig ist $XY \in L^1(\Omega)$ und es gilt $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.*

Definiere $X_1 := \operatorname{Re} X, X_2 := \operatorname{Im} X, Y_1 := \operatorname{Re} Y$ und $Y_2 := \operatorname{Im} Y$. Für $i, j \in \{1, 2\}$ gilt $X_iY_j \in L^1(\Omega)$ und $\mathbb{E}X_iY_j = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}Y_j$ nach Lemma 1.2.2 sowie Behauptung 1. Da außerdem $XY = X_1Y_1 - X_2Y_2 + iX_1Y_2 + iX_2Y_1$ gilt, ist $XY \in L^1(\Omega)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= \mathbb{E}(X_1Y_1 - X_2Y_2 + iX_1Y_2 + iX_2Y_1) \\
&= \mathbb{E}X_1Y_1 - \mathbb{E}X_2Y_2 + i\mathbb{E}X_1Y_2 + i\mathbb{E}X_2Y_1 \\
&= \mathbb{E}(X_1 + iX_2)\mathbb{E}(Y_1 + iY_2) \\
&= \mathbb{E}X\mathbb{E}Y
\end{aligned}$$

$\circ$

$\square$

Satz 1.2.4. *Sei I eine beliebige Indexmenge und sei μ_i mit $i \in I$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und unabhängige reellwertige Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mu_{X_i} = \mu_i$ für alle $i \in I$, wobei μ_{X_i} die Verteilung von X_i bezeichnet.*

Beweis. Definiere $\Omega_i := \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiere außerdem $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$ und es sei $\mathcal{A}$ die von den Rechteckmengen erzeugten Sigma-Algebra auf Ω. Nach Satz A.2.6 existiert ein Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ derart, dass für jede Rechteckmenge A mit Darstellung $A = \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \notin J} \Omega_i$ mit $J \subset I$ endlich, gilt:

$$\mathbb{P}\left(\prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \notin J} \Omega_i\right) = \prod_{j \in J} \mu_j(A_j)$$

Seien nun X_j die Projektionen von Ω auf Ω_j, also $X_j\left((\omega_i)_{i \in I}\right) := \omega_j$.

<u>Beh.1</u>: *Für jedes $j \in I$ gilt $\mu_{X_j} = \mu_j$*

Seien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $j \in I$ beliebig. Dann gilt

$$\mu_{X_j}(B) = \mathbb{P}\left(X_j^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}\left(B \times \prod_{i \neq j} \Omega_i\right) = \mu_j(B)$$

$\circ$

<u>Beh.2</u>: *Die Zufallsvariablen $(X_i)_{i \in I}$ sind unabhängig.*

Sei $J \subset I$ endlich und nichtleer und seien $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für $j \in J$. Dann gilt nach Behauptung 1

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} X_j^{-1}(B_j)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J}\left(B_j \times \prod_{i \neq j} \Omega_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\prod_{j \in J} B_j \times \prod_{i \notin J} \Omega_i\right) \\ &= \prod_{j \in J} \mu_j(B_j) = \prod_{j \in J} \mu_{X_j}(B_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(X_j^{-1}(B_j)\right)\end{aligned}$$

$\circ$

$\square$

1.3. Charakteristische Funktion

Wir führen im folgenden Unterkapitel die charakteristische Funktion eines reellwertigen Zufallsvektors ein. Satz 1.3.6 besagt dann, dass die Verteilung eines reellwertigen Zufallsvektors eindeutig durch dessen charakteristische Funktion bestimmt ist.

Definition 1.3.1. *(charakteristische Funktion / Fouriertransformierte)*
Für einen reellwertigen Zufallsvektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *heißt die Funktion*

$$\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad t \to \int_\Omega e^{i\langle t,X\rangle} d\mathbb{P}$$

charakteristische Funktion *oder* Fouriertransformierte *von X.*

Bemerkung. Es gilt nach der Folgerung von Definition 1.1.3 insbesondere:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,X\rangle} = \int_\Omega e^{i\langle t,X\rangle} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} \mu_X(dx)$$

Lemma 1.3.2. *Sei X ein reellwertiger Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* φ_X *sowie* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in \mathbb{R}^n$*. Dann gilt für* $t \in \mathbb{R}^n$*:*

(a) $|\varphi_X(t)| \leq 1$

(b) $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{i\langle t,b\rangle}$

(c) φ_X *ist stetig*

Beweis. Es gilt

(a) $|\varphi_X(t)| = |\int_\Omega e^{i\langle t,X\rangle} d\mathbb{P}| \leq \int_\Omega |e^{i\langle t,X\rangle}| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega d\mathbb{P} = 1$

(b) $\varphi_{aX+b}(t) = \int_\Omega e^{i\langle t,aX+b\rangle} d\mathbb{P} = e^{i\langle t,b\rangle} \int_\Omega e^{i\langle at,X\rangle} d\mathbb{P} = \varphi_X(at)e^{i\langle t,b\rangle}$

(c) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Dann gilt durch die Beschränktheit von $e^{i\langle t,x\rangle}$ nach dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} e^{i\langle t_n,x\rangle} d\mu_X(x) = \int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} e^{i\langle t_n,x\rangle} d\mu_X(x) \\ &= \int_\mathbb{R} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu_X(x) = \varphi_X(t)\end{aligned}$$

Es ist also φ_X folgenstetig und damit stetig.

$\square$

Satz 1.3.3. *Sei $X \in L^n(\Omega)$ eine reellwertiger Zufallsvariable. Dann ist φ_X n-mal differenzierbar und es gilt*

$$\mathbb{E}X^n = \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{i^n}$$

Beweis. Wir wollen zunächst eine Formel zur Berechnung der n-ten Ableitung der charakteristischen Funktion herleiten.

<u>*Beh.1*</u>*: Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt: $\varphi_X^{(k)}(t) = \int_\Omega i^k X^k e^{itX} d\mathbb{P}$*

Wir führen den Beweis per Induktion.

Induktionsannahme: Es ist $\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi_X(t) = \frac{d}{dt} \int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P}$.
Wir wollen nun die Voraussetzungen für den Satz über die Differentation von Parameterintegralen A.2.1 überprüfen. Für $t \in \mathbb{R}$ ist e^{itX} integrierbar über Ω, denn $|e^{itX}| \leq 1$ und $\int_\Omega 1 d\mathbb{P} = 1$. Außerdem gilt $\frac{d}{dt} e^{itX} = iXe^{itX}$ und es ist $|iXe^{itX}| \leq |X|$ mit $X \in L^1(\Omega)$ nach Voraussetzung. Wir können also den Satz über die Differentation von Parameterintegralen anwenden und es ergibt sich:

$$\varphi_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P} = \int_\Omega \frac{d}{dt} e^{itX} d\mathbb{P} = \int_\Omega iXe^{itX} d\mathbb{P}$$

Induktionsschritt:
Aus der Induktionsannahme und dem Satz über die Differentation von Parameterintegralen (Überprüfung der Voraussetzungen verläuft analog) ergibt sich:

$$\varphi_X^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt} \varphi_X^{(k)}(t) = \frac{d}{dt} \int_\Omega i^k X^k e^{itX} d\mathbb{P} = \int_\Omega i^k X^k \frac{d}{dt} e^{itX} d\mathbb{P} = \int_\Omega i^{k+1} X^{k+1} e^{itX} d\mathbb{P}$$

$\circ$

<u>*Beh.2*</u>*: Es gilt $\varphi_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}X^n$ für $n \in \mathbb{N}$*

Nach Behauptung 1 gilt:

$$\varphi_X^{(n)}(0) = \int_\Omega i^n X^n e^0 d\mathbb{P} = i^n \int_\Omega X^n d\mathbb{P} = i^n \mathbb{E}X^n$$

Es folgt also $\frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{i^n} = \mathbb{E}X^n$ und damit die Behauptung. $\circ$

$\square$

Lemma 1.3.4. *Seien X, Y unabhängige und reellwertige Zufallsvariablen. Dann gilt $\varphi_{(X,Y)}(t) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$ für alle $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.*

Beweis. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) := e^{itx}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f \circ X) = e^{itX} \in L^1(\Omega)$ und $(f \circ Y) = e^{itY} \in L^1(\Omega)$. Damit folgt aus Lemma 1.2.2 und Lemma 1.2.3

$$\varphi_{(X,Y)}(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,(X,Y)\rangle} = \mathbb{E}e^{it_1X}e^{it_2Y} = \mathbb{E}e^{it_1X}\mathbb{E}e^{it_2Y} = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$$

□

Satz 1.3.5. *Seien μ und ν Verteilungen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu$ für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann gilt $\mu = \nu$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mu(K) = \nu(K)$ für alle $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kompakt.

<u>Beh.1</u>: *Sei $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kompakt. Dann gilt $\mu(K) = \nu(K)$.*

Definiere $f(x) :=\text{dist}(x, K) = \inf\{|y - x| : y \in K\}$. Dann ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in K$. Des weiteren sei $f_n = 1 - \min\{nf, 1\}$. Dann ist $f_n \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = 1_K$. Aus dem Satz von Lebesgue erhalten wir dann:

$$\mu(K) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_K d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\mu =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\nu = \int_{R^n} \lim_{n\to\infty} f_n d\nu = \int_{R^n} 1_K d\nu = \nu(K)$$

○

<u>Beh.2</u>: *Es gilt $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Satz A.2.2 und Behauptung 1 gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \quad \text{kompakt}\} = \sup\{\nu(K) : K \subset A \quad \text{kompakt}\} = \nu(A)$$

○

Daraus folgt aber, dass $\mu = \nu$ gilt. □

Satz 1.3.6. *(Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion)*
Seien X und Y reellwertige Zufallsvektoren mit Verteilungen μ_X und μ_Y. Falls die charakteristischen Funktionen von X und Y für alle $t \in \mathbb{R}^n$ übereinstimmen, so ist $\mu_X = \mu_Y$.

Beweis. Seien X und Y Zufallsvektoren mit gleicher charakteristischer Funktion, d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\mu_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\mu_Y(dx)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$. Wähle nun $f \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $\mu_X(\mathbb{R}^n) = \mu_Y(\mathbb{R}^n) = 1$ folgt, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$(1 + 2\|f\|_\infty)(\mu_X + \mu_Y)\left(\mathbb{R}^n \setminus [-N, N]^n\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir bezeichnen fortan $[N, N]^n$ als K. Definiere nun

$$B := \{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : g(x) = e^{i\langle t,x\rangle}, t \in \mathbb{R}^n\}$$

und

$$A := \{\sum_{j=1}^{n} a_j g_j : a_j \in \mathbb{C}, g_j \in B, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt für $g \in A$ nach Voraussetzung, dass $\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu_X = \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu_Y$. Des weiteren sei $A_K := \{g|_K : g \in A\}$. Dann erfüllt A_K die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstrass und ist demnach dicht in $C_b(K, \mathbb{C})$. Es existiert also ein $g_K \in A_K$ mit $\delta := \|g_K - f_K\|_\infty < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, wobei $f_K := f|_K$. Wähle nun $g \in A$ mit $g|_K = g_K$. Durch die Periodizität von g ergibt sich bei genügend großem K, dass

$$\|g\|_\infty = \|g_K\|_\infty \leq \|g_K - f_K\|_\infty + \|f_K\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 1$$

Also gilt $\|f - g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty + 1$ und wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu_Y(dx)| \leq \\
&|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mu_X(dx)| + |\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mu_X(dx) - \\
&\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mu_Y(dx)| + |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu_Y(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mu_Y(dx)| \leq \\
&\int_{[-N,N]^n} |f(x) - g(x)|(\mu_X + \mu_Y)(dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]^n} |f(x) - g(x)|(\mu_X + \mu_Y)(dx) \leq \\
&\int_{[-N,N]^n} \delta(\mu_X + \mu_Y)(dx) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus[-N,N]^n} \|f - g\|_\infty(\mu_X + \mu_Y)(dx) \leq \\
&\delta(\mu_X + \mu_Y)(\mathbb{R}^n) + (2\|f\|_\infty + 1)\left(\mu_X + \mu_Y\right)\left(\mathbb{R}^n \setminus [-N, N]^n\right) \leq \\
&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Da nun aber ε beliebig gewählt wurde, folgt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f\mu_X = \int_{\mathbb{R}^n} f\mu_Y$ für alle stetigen, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dann ergibt sich aber nach Satz 1.3.5, dass $\mu_X = \mu_Y$. □

Satz 1.3.7. *Seien $X_1, ..., X_n$ reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungen $\mu_{X_1}, ..., \mu_{X_n}$. Außerdem sei $\mu_{(X_1,...,X_n)}$ die Verteilung des Zufallsvektors $(X_1, ..., X_n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $X_1, ..., X_n$ *sind unabhängig*

(ii) *Für alle beschränkten und messbaren Funktionen* $g_1, ..., g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\mathbb{E} \prod_{j=1}^{n} g_j(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E} g_j(X_j)$$

(iii) *Für die charakteristische Funktion* φ *gilt:*

$$\varphi_{(X_1,...,X_n)}(t_1, ..., t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t_n)$$

(iv) *Für die Verteilung des Zufallsvektors* $(X_1, ..., X_n)$ *gilt:*

$$\mu_{(X_1,...,X_n)} = \mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_n}$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: folgt aus Lemma 1.2.2 und Lemma 1.2.3.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: folgt aus Lemma 1.3.4.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nach dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d_{\mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_n}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{it_1 x} \cdot ... \cdot e^{it_n x} d_{\mu_{X_1}} \cdot ... \cdot d_{\mu_{X_n}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} e^{it_1 x} \cdot ... \cdot e^{it_n x} d_{\mu_{X_1}} \cdot ... \cdot d_{\mu_{X_n}} \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t_n)\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.3.6.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Seien $B_1, ..., B_n$ beliebige Borel-Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) &= \mu_{(X_1,...,X_n)}(B_1 \times ... \times B_n) \\ &= (\mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_n})(B_1 \times ... \times B_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n)\end{aligned}$$

Also sind $X_1, ..., X_n$ unabhängig. □

Kapitel 2.

Gaußsche Zufallsvariablen, Zufallsvektoren und Prozesse

Wir beginnen das Kapitel mit der Definition von Gaußschen Zufallsvariablen. Von besonderem Interesse ist die Tatsache, dass die Summe von unabhängigen Gaußschen Zufallsvariablen wieder Gaußsch ist. Im zweiten Abschnitt führen wir Gaußsche Zufallsvektoren ein und zeigen, dass für Gaußsche Vektoren Unkorreliertheit und Unabhängigkeit übereinstimmen. Ziel des dritten Abschnitts ist die Definition von Gaußschen Prozessen, die als Abbildung der Indexmenge $[0,1]$ nach $L^2(\Omega)$ aufgefasst werden.

2.1. Gaußsche Zufallsvariablen

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 2.1.1. *(Gaußsche Zufallsvariable)*
Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Gaußsch, falls ein $\sigma \in [0, \infty)$ so existiert, dass die charakteristische Funktion φ_X von X gegeben ist durch

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Man schreibt dann $X \sim N(0, \sigma^2)$ und sagt, dass X $N(0, \sigma^2)$-verteilt ist.

Bemerkung. In den meisten Lehrbüchern wird eine Gaußsche Zufallsvariable über die Verteilung eingeführt. Wir wollen das aber hier nicht machen, da eine Betrachtung über die charakteristische Funktion oftmals einfacher ist. Um die Äquivalenz der Definitionen einzusehen, sei daran erinnert, dass wir in Kapitel 1 gezeigt haben, dass die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im nächsten Satz weisen wir zunächt einmal nach, dass es eine Gaußsche Zufallsvariable überhaupt gibt. Wir konstruieren also einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass X Gaußsche Zufallsvariable ist.

Satz 2.1.2. *Sei $\sigma^2 \geq 0$ beliebig. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und auf ihm eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass X eine $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist. Des weiteren existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Erwartungswert von X^n.*

Beweis. Definiere $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und für $B \in \mathcal{B}$ sei

$$\mathbb{P}(B) := \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx$$

Beh.1: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsraum*

Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt, dass $\mathbb{P}$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist. Wir müssen also nur noch nachweisen, dass $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ gilt. Mithilfe der bekannten Gleichung $\int_\mathbb{R} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ergibt sich:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_\mathbb{R} \sqrt{2\sigma^2} e^{-x^2} dx = 1$$

Es ist also $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $\circ$
Definiere nun $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch $X(\omega) = \omega$. Dann ist X eine messbare Funktion und damit eine Zufallsvariable. Es gilt noch zu zeigen, dass $X \sim N(0, 1)$.

Beh.2: *X ist eine $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable.*

Wir müssen nun also nachweisen, dass für die charakteristische Funktion φ_X von X gilt, dass $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Es ist X eine messbare Funktion und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = e^{itx}$ messbar und beschränkt, also $f \circ X \in L^1(\Omega)$. Dann folgt mit dem Satz über die Differentation von Paramterintegralen A.2.1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_X(t) &= \frac{d}{dt} \int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt} e^{itX} d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \frac{d}{dt} \left(e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \right) dx \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_\mathbb{R} x e^{itx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-\sigma^2 e^{itx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} it\sigma^2 e^{itx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx \\
&= -t\sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{itx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx \\
&= -t\sigma^2 \int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P} \\
&= -t\sigma^2 \varphi_X(t)
\end{aligned}
$$

Um die charakteristische Funktion von X zu berechnen, müssen wir nun also die Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\varphi_X(t) = -t\sigma^2\varphi_X(t)$ mit dem Anfangswert $\varphi_X(0) = 1$ lösen. Sei nun $\varphi_X(t) := e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}$. Dann gilt $\frac{d}{dt}\varphi_X(t) = -t\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2} = -t\sigma^2\varphi_X(t)$ und $\varphi_X(0) = 1$. Dass diese Lösung eindeutig ist, erhält man dann aus dem Satz von Picard-Lindelöf [Heu09, Satz 12.2]. Es ist also X eine $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. $\circ$

Beh.3: *Für $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mathbb{E}X^n$.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$
\mathbb{E}\left|X^n\right| = \int_{\Omega} \left|X^n\right| d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \left| x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \right| dx < \infty
$$

Es folgt also die Behauptung. $\circ$

$\square$

Bemerkung. Da die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt, gilt also $X \in L^n(\Omega)$ für jede Gaußsche Zufallsvariable X und jedes $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 2.1.3. *Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum derart, dass es auf ihm eine Folge von unabhängigen, $N(0, 1)$-verteilten Zufallsvariablen gibt.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 2.1.2 und Satz 1.2.4. $\square$

Bemerkung. Wir wissen nun also, dass Gaßsche Zufallsvariablen existieren. Im Folgenden werden nun einige wichtige Eigenschaften untersucht.

Satz 2.1.4. *Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim N(0, \sigma^2)$. Dann ist*

$$
\mathbb{E}X^k = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ (k-1)!!\sigma^k & k \text{ gerade,} \end{cases}
$$

wobei $(k-1)!! := (k-1)(k-3)\cdots(k-(k-1))$. Insbesondere gilt also $\mathbb{E}X = 0$ sowie $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst eine Formel zur Berechnung der Ableitung der charakteristischen Funktion von X.

<u>Beh.1</u>:
$$\varphi_X^{(k)}(t) = -(k-1)\sigma^2\varphi_X^{(k-2)}(t) - t\sigma^2\varphi_X^{(k-1)} \textit{ für } k \geq 2$$

Wir führen den Beweis per Induktion.
Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
\varphi_X^{(2)}(t) &= -\sigma^2 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t^2\sigma^4 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \\
&= -\sigma^2 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} - t\sigma^2(-t\sigma^2 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}) \\
&= -\varphi_X^{(0)}(t) - t\sigma^2\varphi_X^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\varphi_X^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_X^{(k)}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(-(k-1)\sigma^2\varphi_X^{(k-2)}(t) - t\sigma^2\varphi_X^{(k-1)}(t)\Big) \\
&= -(k-1)\sigma^2\varphi_X^{(k-1)}(t) - \sigma^2(\varphi_X^{(k-1)}(t) + t\varphi_X^{(k)}(t)) \\
&= -k\sigma^2\varphi_X^{(k-1)}(t) - t\sigma^2\varphi_X^{(k)}(t)
\end{aligned}$$

Somit ist die oben behauptete Formel bewiesen. Insbesondere folgt, dass $\left|\varphi_X^{(k)}(t)\right|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ endlich ist. $\circ$
Es sei vor der nächsten Bemerkung daran erinnert, dass $X \in L^k(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

<u>Beh.2</u>: $\mathbb{E}X^k = 0$ *für k ungerade*

Beweis per Induktion:
Induktionsannahme: Für $k = 1$ ergibt sich aus Satz 1.3.3, dass

$$\mathbb{E}X = \frac{\varphi_X^{(1)}(0)}{i} = -\frac{t\sigma^2}{i}e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_0 = 0$$

Induktionsschritt: Sei $k+1$ ungerade. Es gilt nach Satz 1.3.3, der Behauptung 1 und der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^{k+1} &= \frac{\varphi_X^{(k+1)}(0)}{i^{k+1}} \\
&= \frac{1}{i^{k+1}} \left(-k\sigma^2 \varphi_X^{(k-1)}(t) - t\sigma^2 \varphi_X^{(k)}(t) \right) \Big|_0 \\
&= \frac{-1}{i^{k+1}} k\sigma^2 \varphi_X^{(k-1)}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\circ$

<u>Beh.3</u>: *$\mathbb{E}X^k = (k-1)!!\sigma^k$ für k gerade*

Beweis per Induktion:
Induktionsannahme: Für $k = 2$ folgt aus Satz 1.3.3, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 = \frac{\varphi_X^{(2)}(0)}{i^2} &= -\left(\frac{d}{dt} \left(-t\sigma^2 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \right) \Big|_0 \right) \\
&= \left(\sigma^2 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} - t^2\sigma^4 e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big|_0 \right) = \sigma^2
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei $k+1$ gerade. Es gilt nach Satz 1.3.3 und der vorherigen Behauptung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^{k+1} &= -\frac{1}{i^{k+1}} k\sigma^2 \varphi_X^{(k-1)}(0) \\
&= -\frac{1}{i^2} \frac{1}{i^{k-1}} \varphi_X^{(k-1)}(0) k\sigma^2 \\
&= k\sigma^2 \mathbb{E}X^{k-1} \\
&= k\sigma^2 (k-2)!!\sigma^{k-1} \\
&= k!!\sigma^{k+1}
\end{aligned}$$

$\circ$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. $\square$

Lemma 2.1.5. *Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $aX + bY$ Gaußsche Zufallsvariable mit*

$$aX + bY \sim N(0, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

Beweis. Aus Lemma 1.3.2 und Satz 1.3.7 folgt

$$\varphi_{aX+bY}(t) = \varphi_{aX}(t)\varphi_{bY}(t) = \varphi_X(at)\varphi_Y(bt) = e^{-\frac{(at)^2\sigma_X^2}{2}} e^{-\frac{(bt)^2\sigma_Y^2}{2}} = e^{-\frac{(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)t^2}{2}}$$

Damit folgt nach Definition der Gaußschen Zufallsvariable aber sofort die Behauptung. $\square$

Lemma 2.1.6. *Seien X und X_n Zufallsvariablen mit $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne μ_X die Verteilung von X und μ_{X_n} die Verteilung von X_n und für alle $f \in C_b(\mathbb{R})$ gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_X(x)$$

Dann konvergiert die Folge $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein σ^2 und es gilt $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Beweis.

<u>*Beh.1*</u>*: Die Folge $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Es gilt nach Voraussetzung

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_X(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2}$$

Also existiert $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2}$. Angenommen es gilt nun $\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2} = 0$. Dann folgt

$$\varphi_X(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad t = 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist die charakteristische Funktion nicht stetig, was im Widerspruch zu Lemma 1.3.2 steht.
Es ist also $\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2} > 0$ und aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt dann

$$\log\left(\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(e^{-\sigma_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} -\sigma_n^2$$

und damit die Behauptung. $\circ$

<u>*Beh.2*</u>*: Es ist $X \sim N(0, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$.*

Es gilt nach den obigen Berechnungen und durch die Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} = \varphi_X(t)$$

Daraus folgt aber die Behauptung. $\circ$

$\square$

2.2. Gaußsche Vektoren

Nachdem wir im ersten Abschnitt nur Gaußsche Zufallsvariablen betrachtet haben, definieren wir nun auch eine Klasse von Zufallsvektoren als Gaußsch.

Definition 2.2.1. *(Gaußscher Vektor)*
Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Gaußscher Vektor*, falls für alle $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ die Summe $\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ eine Gaußsche Zufallsvariable ist.*

Bemerkung. Sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein Zufallsvektor. Ist X Gaußsch, so sind insbesondere $X_1, \cdots, X_n$ Gaußsche Zufallsvariablen. Andererseits gilt: Sind $X_1, \cdots, X_n$ unabhängige Gaußsche Zufallsvariablen, so ist nach Lemma 2.1.5 auch $\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ Gaußsch für alle $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Also ist X ein Gaußscher Vektor.
Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass für Gaußsche Zufallsvariablen X und Y der Zufallsvektor (X, Y) im Allgemeinen nicht Gaußsch ist.

Lemma 2.2.2. *Sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein Gaußscher Vektor. Dann ist für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auch AX ein Gaußscher Vektor, d.h. jede lineare Transformation eines Gaußschen Vektors ist ein Gaußscher Vektor.*

Beweis. Sei X ein Gaußscher Vektor und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt für beliebige $\beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^m \beta_j (AX)_j = \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} X_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \beta_j a_{jk} \right) X_k$$

Dies ist eine Gaußsche Zufallsvariable, da X ein Gaußscher Vektor ist und somit ist AX ein Gaußscher Vektor. □

Lemma 2.2.3. *Sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein Gaußscher Vektor und A die Kovarianzmatrix von X. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}^n$*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{i\langle X, t \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle At, t \rangle}.$$

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist $\langle X, t \rangle = \sum_j t_j X_j$ eine Gaußsche Zufallsvariable. Daher gilt nach Definition

$$\varphi_{\langle X, t \rangle}(1) = \mathbb{E}e^{i\langle X, t \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t)},$$

wobei $\sigma^2(t) = \mathrm{Var}(\langle X, t \rangle)$. Nun gilt nach Lemma 1.1.6

$$\mathrm{Var}(\langle X, t \rangle) = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^n t_j X_j) = \sum_{i,j=1}^n t_i t_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \langle At, t \rangle$$

Das ist gerade die Behauptung. □

Satz 2.2.4. *Sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein Gaußscher Vektor. Dann sind $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig genau dann, wenn $X_1, \cdots, X_n$ paarweise unkorrelliert sind.*

Beweis. Seien zunächst $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig und seien $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann gilt nach Lemma 1.2.3, dass $\mathbb{E}X_iX_j = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j$. Daraus folgt dann aber

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j = 0$$

Also sind $X_1, \cdots, X_n$ paarweise unkorrelliert.
Umgekehrt seien nun $X_1, \cdots, X_n$ paarweise unkorrelliert und es sei $\mathbb{E}X_j^2 =: \sigma_j^2$. Dann ist die Kovarianzmatrix A von X gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Mit Lemma 2.2.3 folgt dann, dass

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{-i\langle X,t\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle At,t\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 t_j^2} = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}\sigma_j^2 t_j^2} = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}e^{it_jX_j} = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j)$$

Nach Satz 1.3.7 sind somit $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig. □

Bemerkung. Der vorherige Satz ist im Allgemeinen falsch, falls zwar $X_1, ..., X_n$ Gaußsche Zufallsvariablen sind, $(X_1, ..., X_n)$ aber kein Gaußscher Vektor ist.

2.3. Gaußsche Prozesse

Im folgenden Unterkapitel werden Gaußsche Prozesse definiert. Um die Definition aber verstehen zu können, wird zunächst der Begriff des stochastischen Prozesses eingeführt.

Definition 2.3.1. *(stochastischer Prozess)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir nennen eine Funktion $X : I \to L^2(\Omega)$ einen stochastischen Prozess.

Definition 2.3.2. *(unabhängige Zuwächse)*
Wir sagen, dass ein stochastischer Prozess X unabhängige Zuwächse *besitzt, falls für beliebige $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \in I$ die Zufallsvariablen $X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ unabhängig sind.*

Definition 2.3.3. *(Kovarianzfunktion)*
Für einen stochastischen Prozess $X : I \to L^2(\Omega)$ definieren wir die Kovarianzfunktion *durch*

$$k : I \times I \to \mathbb{R}, \quad k(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)).$$

Definition 2.3.4. *(Gaußscher Prozess)*
Ein stochastischer Prozess $X : I \to L^2(\Omega)$ heißt Gaußscher Prozess*, falls für eine beliebige Wahl von $t_1, \cdots, t_n \in I$ der Zufallsvektor $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ Gaußsch ist.*

Bemerkung. Der Einfachheit halber werden wir im Folgenden immer das Intervall $[0,1]$ betrachten.

Bemerkung. Bei einem Gaußschen Prozess $X = (X(t))_{t\in[0,1]}$ ist also insbesondere für beliebiges $t \in [0,1]$ die Zufallsvariable $X(t)$ Gaußsch.

Bemerkung. Ein Gaußscher Prozess ist durch die Kovarianzfunktion eindeutig bestimmt im Sinne von endlich-dimensionalen Verteilungen. Das heißt, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen von zwei Gaußschen Prozessen, die die gleiche Kovarianzfunktion besitzen, übereinstimmen.

Lemma 2.3.5. *Sei $X = (X(t))_{t\in[0,1]}$ ein Gaußscher Prozess. Dann besitzt X genau dann unabhängige Zuwächse, wenn die Zuwächse unkorrelliert sind.*

Beweis. Seien $t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,1]$ beliebig. Dann ist $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ Gaußscher Vektor und damit nach Lemma 2.2.2 auch $(X(t_2)-X(t_1), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1}))$. Folglich ergibt sich das Lemma aus Satz 2.2.4. $\square$

Kapitel 3.

Isonormale Prozesse

Nachdem im letzten Kapitel der Begriff der Kovarianzfunktion eingeführt wurde und wir bemerkten, dass die Kovarianzfunktion die endlich-dimensionalen Verteilungen von Gaußschen Prozessen eindeutig bestimmt, wollen wir nun einen Schritt weiter gehen. Es stellt sich die Frage, für welche reellwertigen Funktionen es einen Gaußschen Prozess gibt, sodass deren Kovarianzfunkion mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Um dies genauer untersuchen zu können, erweisen sich die isonormalen Prozesse als sehr hilfreich, die wir im folgenden Kapitel einführen. Als Hauptresultat erhalten wir in diesem Abschnitt die Existenz von isonormalen Prozessen auf separablen Hilberträumen. Daraus bekommen wir dann eine Anleitung zur Konstruktion eines Gaußschen Prozesses auf $L^2[0,1]$.

3.1. Eigenschaften isonormaler Prozesse

Definition 3.1.1. *(H-isonormaler Prozess)*
*Sei H ein Hilbertraum und (Ω, Σ, P) ein W-Raum. Ein H-*isonormaler *Prozess auf Ω ist eine Abbildung $\mathcal{W} : H \to L^2(\Omega)$ mit*

1. *Für jedes $h \in H$ ist $\mathcal{W}(h)$ eine Gaußsche Zufallsvariable*

2. *Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt: $\langle \mathcal{W}(h_1), \mathcal{W}(h_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$*

Bemerkung. Für einen H-isonormalen Prozess $\mathcal{W}$ gilt nach Definition des Skalarprodukts auf $L^2(\Omega)$, dass $\langle \mathcal{W}(h_1), \mathcal{W}(h_2) \rangle = \mathbb{E}\mathcal{W}(h_1)\mathcal{W}(h_2)$.

Lemma 3.1.2. *Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{W}$ ein H-isonormaler Prozess. Dann ist $\mathcal{W}$ linear und isometrisch.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma A.1.5. □

3.2. Existenz eines isonormalen Prozesses

Im ersten Teil des Kapitels wurden isonormale Prozesse definiert und deren Linearität und Isometrie beobachtet. Dennoch ist es noch nicht klar, auf welchen Räumen es isonormale Prozesse überhaupt gibt. Wir zeigen nun, dass für separables H ein H-isonormaler Prozess existiert.

Satz 3.2.1. *(Existenz H-isonormaler Prozesse)*
Ist H ein separabler Hilbertraum, so gibt es einen H-isonormalen Prozess.

Beweis. Nach der Bemerkung zu Satz 2.1.2 gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum derart, dass auf ihm eine Folge von unabhängigen, $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen existiert. Seien nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein solcher Wahrscheinlichkeitsraum und $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge und sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Es sei im Folgenden $\mathcal{W}(h)$ durch $\mathcal{W}(h) := \sum_n \gamma_n \langle h, e_n \rangle$ definiert.

<u>*Beh.1*</u>: $\mathcal{W}(h) \in L^2(\Omega)$

Sei $h \in H$ beliebig und $\mathcal{W}_k(h) := \sum_{n=1}^k \gamma_n \langle h, e_n \rangle \in L^2(\Omega)$. Wir zeigen, dass $\mathcal{W}_k$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ bildet. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H bildet, gilt nach der Besselschen Ungleichung $\sum_n |\langle h, e_n \rangle|^2 \leq \|h\|^2$. Folglich existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=N}^{N+p} |\langle h, e_n \rangle|^2 < \varepsilon$$

Da die γ_n unabhängig und $N(0,1)$-verteilt sind, folgt außerdem mit Lemma 1.2.3

$$\langle \gamma_j, \gamma_k \rangle = \mathbb{E}\gamma_j\gamma_k = \mathbb{E}\gamma_j\mathbb{E}\gamma_k = \delta_{jk}$$

Damit ergibt sich aber für N, p wie oben

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}_{N+p}(h) - \mathcal{W}_N(h)\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} \gamma_n \langle h, e_n \rangle \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\langle \sum_{n=N+1}^{N+p} \gamma_n \langle h, e_n \rangle , \sum_{m=N+1}^{N+p} \gamma_m \langle h, e_m \rangle \right\rangle \\ &= \sum_{n=N+1}^{N+p} |\langle h, e_n \rangle|^2 \langle \gamma_n, \gamma_n \rangle \\ &= \sum_{n=N+1}^{N+p} |\langle h, e_n \rangle|^2 \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Es ist also $\mathcal{W}_k(h)$ Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ und aufgrund der Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ existiert $\mathcal{W}(h)$ und es gilt $\mathcal{W}(h) \in L^2(\Omega)$. $\circ$

Beh.2: *$\mathcal{W}(h)$ ist Gaußsche Zufallsvariable*

Die γ_n sind unabhängig und $N(0,1)$-verteilt. Also folgt aus Lemma 2.1.5

$$\mathcal{W}_k(h) = \sum_{n=1}^{k} \gamma_n \langle h, e_n \rangle \sim N(0, \sum_{n=1}^{k} \langle h, e_n \rangle^2)$$

Wir wollen nun Lemma 2.1.6 anwenden und überprüfen daher die Voraussetzungen.

(i) Aus dem Beweis der vorherigen Behauptung ergibt sich, dass $\mathcal{W}_k(h)$ in $L^2(\Omega)$ gegen $\mathcal{W}(h)$ konvergiert. Nach Lemma A.2.4 existiert also eine Teilfolge $\mathcal{W}_{k_j}(h)$, die fast sicher gegen $\mathcal{W}(h)$ konvergiert. Wir bekommen nun aus Lemma A.2.3, dass für alle $f \in C_b(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{W}_{k_j}(h)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{W}(h)}(x)$$

(ii) Wir erhalten aus der Besselschen Ungleichung A.1.1, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2 \leq \|h\|$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2$.

Wir haben nun also die Voraussetzungen von Lemma 2.1.6 überprüft und es folgt

$$\mathcal{W}(h) \sim N(0, \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2)$$

$\circ$

Beh.3: $\langle \mathcal{W}(h_1), \mathcal{W}(h_2)\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$

Seien $h_1, h_2 \in H$. Es gilt $\langle \gamma_j, \gamma_k\rangle = \delta_{jk}$ und damit folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{W}(h_1), \mathcal{W}(h_2)\rangle &= \mathbb{E}\mathcal{W}(h_1)\mathcal{W}(h_2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \langle h_1, e_j\rangle\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \langle h_2, e_k\rangle\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle h_1, e_j\rangle \langle h_2, e_j\rangle = \langle h_1, h_2\rangle
\end{aligned}$$

$\circ$

$\square$

Bemerkung. Nachdem wir nun wissen, dass es für ein Intervall $I \subset [0, \infty]$ einen $L^2(I)$-isometrischen Prozess $\mathcal{W} : L^2(I) \to L^2(\Omega)$ gibt, können wir auf einfache Art und Weise einen Gaußschen Prozess $X : I \to L^2(\Omega)$ konstruieren.

Proposition 3.2.2. *(Konstruktion eines Gaußschen Prozesses)*
Sei $I \subset [0, \infty]$ ein Intervall und sei $\mathcal{W} : L^2(I) \to L^2(\Omega)$ ein $L^2(I)$-isometrischer Prozess. Außerdem sei $F \in C(I, L^2(I))$. Definiere $X : I \to L^2(\Omega)$ durch $X = \mathcal{W} \circ F$. Dann ist X ein Gaußscher Prozess und es gilt $X \in C(I, L^2(\Omega))$.

Beweis. Definiere $X : I \to L^2(\Omega)$ durch $X = \mathcal{W} \circ F$. Seien außerdem $t_1, .., t_n \in I$ und $c_1, .., c_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt nach der Linearität von $\mathcal{W}$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{W}(F(t_k)) = \mathcal{W}(\sum_{k=1}^{n} c_k F(t_k)).$$

Da aber $\mathcal{W}(\sum_{k=1}^{n} c_k F(t_k))$ nach Definition des isonormalen Prozesses Gaußsch ist, ist auch $\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k)$ Gaußsch. Nach Definition ist also X ein Gaußscher Prozess. Weiterhin ist X als Komposition der stetigen Abbildung F mit der isometrischen Abbildung $\mathcal{W}$ stetig. $\square$

Kapitel 4.

Existenz Gaußscher Prozesse zu gegebener Kovarianzfunktion

Dieses Kapitel kann als das Hauptkapitel der Arbeit angesehen werden. Wir wollen im ersten Abschnitt die Begriffe formpositiv, positiv semidefinit und symmetrisch einführen und den Zusammenhang zwischen der Kernfunktion und ihres zugehörigen Integraloperators auf $L^2[0,1]$ untersuchen. So erhalten wir, dass die Kernfunktion genau dann symmetrisch und positiv semidefinit ist, wenn der zugehörige Integraloperator symmetrisch und formpositiv ist. In Satz 4.2.1 wird gezeigt, dass es für jede symmetrische und positiv semidefinite Funktion $k \in C([0,1]^2)$ einen Gaußschen Prozess $(X(t))_{t\in[0,1]}$ mit Kovarianzfunktion k gibt. Es sei darauf hingeweisen, dass man zum Beweis dieses Satzes den Satz von Mercer benötigt, der in Anhang B aufgeführt und bewiesen wird.

4.1. Zusammenhang von Kernfunktion und Integraloperator

Um die Existenz von Gaußschen Prozessen zu gegebener Kovarianzfunktion untersuchen zu können, müssen wir zunächst mehr über den Zusammenhang von Kernfunktion und Integraloperator wissen.

Definition 4.1.1. *(positiv semidefinit)*
Eine Funktion $k : A^2 \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ heißt positiv semidefinit*, falls für beliebige $a_1, .., a_m \in \mathbb{R}$ und für beliebige $t_1, .., t_m \in A$ gilt:*

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i, t_j) \geq 0$$

Bemerkung. Üblicherweise heißt eine Funktion k positiv, falls $k \geq 0$ gilt. Wie die folgenden Beispiele zeigen, sind die Begriffe positiv und positiv semidefinit unabhängig.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Definiere

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, k(s,t) = f(s)f(t).$$

Dann ist k positiv semidefinit, denn für $a_1, .., a_m \in \mathbb{R}$ sowie $t_1, .., t_m \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i, t_j) &= (a_1, .., a_m) \begin{pmatrix} k(t_1, t_1) & \cdots & k(t_1, t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_m, t_1) & \cdots & k(t_m, t_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\
&= (a_1, .., a_m) \begin{pmatrix} f(t_1)f(t_1) & \cdots & f(t_1)f(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t_m)f(t_1) & \cdots & f(t_m)f(t_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\
&= (a_1, .., a_m) \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{pmatrix} (f(t_1), .., f(t_m)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\
&= \langle (a_1, .., a_m), (f(t_1), .., f(t_m) \rangle^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Allerdings gilt für $f(x) = x$, dass $k(-1,1) = f(-1)f(1) = -1 < 0$. k ist also nicht positiv.

Beispiel. Sei $k(s,t) := |s-t|$. Dann ist k positiv. Allerdings ist für $a_1 := t_1 := 1$ und $a_2 := t_2 := -1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} a_i a_j k(t_i, t_j) = (1)(1)|1-1| + (-1)(1)|-1-1| + (1)(-1)|1-(-1)| \\
+ (-1)(-1)|-1-(-1)| = -4 < 0
\end{aligned}$$

Also ist k nicht positiv semidefinit.

Definition 4.1.2. *(symmetrische Funktion)*
Eine Funktion $k : A^2 \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ heißt symmetrisch, *falls für alle $s, t \in A$ gilt*

$$k(s,t) = k(t,s)$$

Satz 4.1.3. *Sei $(X(t))_{t\in[0,1]}$ ein Gaußscher Prozess. Dann ist die Kovarianzfunktion k symmetrisch und positiv semidefinit.*

Beweis.

<u>Beh.1</u>: *Die Kovarianzfunktion k ist symmetrisch.*

Seien $s, t \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt

$$k(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t) = \mathbb{E}X(t)X(s) = k(t,s)$$

$\circ$

<u>Beh.2</u>: *Die Kovarianzfunktion k ist positiv semidefinit.*

Seien $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus den Rechenregeln für Varianz und Kovarianz sowie der Tatsache, dass $\mathbb{E}X(t_j) = 0$ für $j = 1, ..., n$, folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j k(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \mathbb{E}\left(X(t_i)X(t_j)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}\left(X(t_i), X(t_j)\right) \\ &= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i)\right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Also ist k positiv semidefinit. $\circ$

$\square$

Definition 4.1.4. *(symmetrischer Operator)*
Ein linearer Operator $Q : H \to H$ eines Hilbertraumes H heißt symmetrisch*, falls für alle $f, g \in H$ gilt:*

$$\langle Qf, g \rangle = \langle f, Qg \rangle$$

Satz 4.1.5. *Sei $k \in C([0,1]^2)$. Dann ist k genau dann symmetrisch, wenn der zugehörige Integraloperator*

$$Q_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Q_k(f) := \int_0^1 k(\cdot\,, t) f(t) dt$$

symmetrisch ist.

Beweis.

<u>*Beh.1*</u>*: Sei k symmetrisch. Dann ist Q_k symmetrisch.*

Seien $f, g \in L^2([0,1])$. Dann gilt durch die Symmetrie von k und nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\langle Q_k(f), g\rangle &= \int_0^1 Q(f)(s)g(s)ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)f(t)dt\right) g(s)ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)g(s)ds\right) f(t)dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(t,s)g(s)ds\right) f(t)dt \\
&= \int_0^1 f(t)Q_k(g)(t)dt \\
&= \langle f, Q_k(g)\rangle
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung. $\circ$

<u>*Beh.2*</u>*: Sei Q_k symmetrisch. Dann ist k symmetrisch*

Definiere $h : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch $h(s,t) = k(s,t) - k(t,s)$. Dann gilt wegen der Symmetrie von Q_k für beliebige $f, g \in L^2[0,1]$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle Q_k f, g\rangle - \langle f, Q_k g\rangle \\
&= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)f(t)g(s)dtds - \int_0^1 \int_0^1 f(t)k(t,s)g(s)dsdt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (k(s,t) - k(t,s))f(t)g(s)dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 h(s,t)f(t)g(s)dtds
\end{aligned}$$

Angenommen es existieren $x, y \in [0,1]$ derart, dass $h(x,y) > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $h(x,y) > \varepsilon$. Da nun h stetig ist, existieren Intervalle $I, J \subset [0,1]$ mit $x \in I, y \in J, |I| > 0, |J| > 0$ und $h(s,t) > \varepsilon$ für alle $s \in I, t \in J$. Dann gilt aber für die

Funktionen $f := 1_I \in L^2[0,1]$ und $g := 1_J \in L^2[0,1]$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 h(s,t)f(t)g(s)dtds &= \int_0^1 \int_0^1 h(s,t)1_I(t)1_J(s)dtds \\ &\geq \varepsilon|I||J| \\ &> 0\end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch. Analog kann man zeigen, dass $h(s,t) < 0$ nicht möglich ist. Also ist $h = 0$ und damit $k(s,t) = k(t,s)$ für alle $s,t \in [0,1]$. ∘

□

Definition 4.1.6. *(formpositiver Operator)*
Ein linearer Operator $Q : H \to H$ eines reellen Hilbertraumes H heißt formpositiv*, falls für alle $f \in H$ gilt:*

$$\langle Qf, f\rangle \geq 0$$

Satz 4.1.7. *Sei $k \in C([0,1]^2)$. Dann ist k genau dann positiv semidefinit, wenn der zugehörige Integraloperator*

$$Q_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Q_k(f) := \int_0^1 k(\cdot\,,t)f(t)dt$$

formpositiv ist.

Beweis. Sei zunächst k positiv semidefinit. Wir zeigen, dass dann Q_k formpositiv ist.

<u>*Beh.1*</u>*: Für $f \in C([0,1])$ gilt $\langle Q_k(f), f\rangle \geq 0$*

Sei $f \in C([0,1])$. Es gilt $\langle Q_k(f), f\rangle = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)f(t)f(s)dsdt$. Sei nun $0 = s_0 < .. < s_n = 1$ eine Partition von $[0,1]$. Setze $l_i := (s_i, s_{i-1})$. Sei außerdem $r_i \in l_i$ eine Stützstelle. Dann ist $(l_i \times l_j)_{i,j}$ eine Zerlegung von $[0,1]\times[0,1]$ und (r_i, r_j) eine Stützstelle in $(l_i \times l_j)_{i,j}$. Da nun k und f stetig sind, ist $g(s,t) := k(s,t)f(s)f(t)$ stetig und damit Riemann-integrierbar. Es gilt also nach der Definition des Riemann-Integrals, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 k(s,t)f(t)f(s)dsdt = \lim_{|l_i \times l_j| \to 0} \sum_{i,j} k(r_i,r_j)f(r_i)f(r_j)|l_i||l_j|$$

Setzt man $a_i := f(r_i)|l_i|$ und $a_j := f(r_j)|l_j|$ so gilt

$$\sum_{i,j} k(r_i,r_j)f(r_i)f(r_j)|l_i||l_j| = \sum_{i,j} k(r_i,r_j)a_ia_j \geq 0,$$

da k positiv semidefinit ist. Es folgt also

$$\langle Q_k(f), f\rangle = \lim_{|l_i \times l_j| \to 0} \sum_{i,j} k(r_i, r_j) f(r_i) f(r_j) |l_i||l_j| \geq 0.$$

$\circ$

<u>Beh.2</u>: *Für $f \in L^2([0,1])$ gilt $\langle Q_k(f), f\rangle \geq 0$*

Nach Lemma A.1.6 ist $Q_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ stetig und nach Lemma A.1.2 ist damit $h : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}, h(g) = \langle Q_k(g), g\rangle$ stetig. Nach [Wer07, Satz I.2.12] ist $C([0,1])$ dicht in $L^2([0,1])$. Für $f \in L^2([0,1])$ existiert also eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in L^2. Aus der Stetigkeit von h folgt dann:

$$\langle Q_k(f), f\rangle = h(f) = h(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} h(f_n) = \lim_{n\to\infty} \langle Q_k(f_n), f_n\rangle \geq 0$$

$\circ$

Es folgt also, dass Q_k formpositiv ist.

<u>Beh.3</u>: *Sei Q_k formpositiv. Dann ist k positiv semidefinit.*

Q_k ist formpositiv, also gilt $\langle Q_k f, f\rangle \geq 0$ für alle $f \in L^2[0,1]$. Seien $t_1, ..., t_m \in [0,1]$, $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei außerdem $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$ eine Zerlegung von $[0,1]$ mit $|s_i - s_{i-1}| = \frac{1}{n}$. Definiere $\mathcal{S} := \{[s_i, s_{i-1}] : i = 1, ..., n\}$. Da k gleichmäßig stetig ist, kann nun n so groß gewählt werden, dass $|k(s,t) - k(s',t')| < \varepsilon$, falls $s, s' \in I \in \mathcal{S}$ und $t, t' \in J \in \mathcal{S}$ gilt. Für t_j wähle nun $I_j \in \mathcal{S}$ so, dass $t_j \in I_j$. Es sei nun $f := \sum_{j=1}^m n a_j 1_{I_j}$. Dann ist $f \in L^2[0,1]$ und damit gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle Q_k f, f\rangle \\
&= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t) f(t) f(s) dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t) \left(\sum_{i=1}^m n a_i 1_{I_i}(t)\right) \left(\sum_{j=1}^m n a_j 1_{I_j}(s)\right) dtds \\
&= \sum_{i,j=1}^m \int_{I_i} \int_{I_j} k(s,t) n^2 a_i a_j dtds \\
&= \sum_{i,j=1}^m \int_{I_i} \int_{I_j} k(s,t) n^2 a_i a_j dtds + \sum_{i,j=1}^m a_i a_j k(t_i, t_j) - \sum_{i,j=1}^m a_i a_j k(t_i, t_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{I_i}\int_{I_j} k(s,t) n^2 a_i a_j dt ds - \sum_{i,j=1}^{m} \int_{I_i}\int_{I_j} k(t_i,t_j) n^2 a_i a_j dt ds \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{I_i}\int_{I_j} |n^2 a_i a_j \left(k(s,t) - k(t_i,t_j)\right)| dt ds \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) + \sum_{i,j=1}^{m} n^2 |a_i a_j| \int_{I_i}\int_{I_j} |k(s,t) - k(t_i,t_j)| dt ds \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) + \sum_{i,j=1}^{m} n^2 |a_i a_j| \varepsilon \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{m} |a_i a_j|
\end{aligned}
$$

Da nun aber ε beliebig gewählt wurde, folgt $\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j k(t_i,t_j) \geq 0$, also ist k positiv semidefinit. ∘

□

4.2. Existenz Gaußscher Prozess

Mit Satz 4.1.3 haben wir gezeigt, dass eine Funktion notwendigerweise symmetrisch und positiv semidefinit sein muss, um Kovarianzfunktion eines Gaußschen Prozesses zu sein. Dass diese Eigenschaften für stetige Funktionen auch hinreichend sind, ist Bestandteil des nächsten Satzes.

Satz 4.2.1. *Sei $k \in C([0,1]^2)$ symmetrisch und positiv semidefinit. Dann existiert ein Gaußscher Prozess $(X(t))_{t\in[0,1]}$ mit Kovarianzfunktion k.*

Beweis. Nach dem Satz von Mercer existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ und eine Folge von zugehörigen Eigenvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$, die ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$ bilden, so dass $k(s,t) = \sum_1^\infty \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ gilt und die Reihe gleichmäßig konvergiert. Definiere nun

$$F : [0,1] \to L^2([0,1]), F(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(t) e_n$$

Zunächst einmal muss gezeigt werden, dass F wirklich nach $L^2[0,1]$ abbildet.

Beh.1: $F(t) \in L^2([0,1])$ *und* $\|F(t)\|_{L^2}^2 = \sum_1^\infty \lambda_n e_n(t)^2$

Es gilt nach dem Satz von Mercer, dass $\sum_1^\infty \lambda_n e_n(t)^2 = k(t,t) < \infty$, da $k \in C([0,1]^2)$. Also ist $\sqrt{\lambda_n} e_n(t) \in \ell^2$ und die Behauptung folgt direkt aus Lemma A.1.4. $\circ$

Beh.2: *Für* $s, t \in [0,1]$ *gilt*

$$\|F(s) - F(t)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [e_n(s) - e_n(t)]^2 = k(s,s) - 2k(s,t) + k(t,t)$$

Nach dem Satz von Mercer gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [e_n(s) - e_n(t)]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [e_n(s)^2 - 2e_n(s)e_n(t) + e_n(t)^2] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n e_n(s)e_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(t)^2 \\
&= k(s,s) - 2k(s,t) + k(t,t)
\end{aligned}$$

Also folgt, dass $(\sqrt{\lambda_n}[e_n(s) - e_n(t)]) \in \ell^2$. Damit gilt nach Lemma A.1.4

$$\begin{aligned}
\|F(s) - F(t)\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(s) e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(t) e_n \right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} [e_n(s) - e_n(t)] e_n \right\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [e_n(s) - e_n(t)]^2 \\
&= k(s,s) - 2k(s,t) + k(t,t)
\end{aligned}$$

$\circ$

Beh.3: $F \in C([0,1], L^2[0,1])$

Sei $t \in [0,1]$ fest. Dann gilt für $s \in [0,1]$ nach Behauptung 2:

$$\|F(s) - F(t)\|_{L^2}^2 = k(s,s) - 2k(s,t) + k(t,t)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da k stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x_1, x_2) - (t,t))\| < \delta$ folgt, dass $|k(x_1, x_2) - k(t,t)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ mit $|s-t| < \frac{\delta^2}{2}$. Dann gilt $\|(s,t) - (t,t)\| \leq \|(s,s) - (t,t)\| \leq \delta$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\|F(s) - F(t)\|_{L^2}^2 &= k(s,s) - 2k(s,t) + k(t,t) \\
&\leq |k(s,s) - k(s,t)| + |k(t,t) - k(s,t)| \\
&\leq |k(s,s) - k(t,t)| + |k(t,t) - k(s,t)| + |k(t,t) - k(s,t)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Somit ist F in t stetig und da t beliebig in $[0,1]$ war, ist F insgesamt stetig. ◦

<u>*Beh.4:*</u> $\langle F(s), F(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t) = k(s,t)$

Für $r \in [0,1]$ setze $F_n(r) := \sum_1^n \sqrt{\lambda_j} e_j(r) e_j$. Dann ist $F_n(r) \in L^2([0,1])\ \forall n \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} F_n(r) = F(r)$. Mit der Stetigkeit des Skalarprodukts und der Orthogonalität von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\langle F(s), F(t) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle F_n(s), F_n(t) \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 F_n(s)(x) F_n(t)(x) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} e_j(s) e_j(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} e_j(t) e_j(x) \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^n \sqrt{\lambda_i} e_i(s) e_i(x) \sqrt{\lambda_j} e_j(t) e_j(x) \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^n \left(\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} e_i(s) e_j(t) \int_0^1 e_i(x) e_j(x) dx \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j(s) e_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t) = k(s,t)
\end{aligned}$$

◦

__Beh.5__: *Es existiert ein Gaußscher Prozess $X(t)_{t\in[0,1]}$ mit der Kovarianzfunktion k.*

Sei $\mathcal{W}$ ein $L^2([0,1])$-isonormaler Prozess, der nach Satz 3.2.1 existiert. Man definiere nun $X := \mathcal{W} \circ F$. Dann folgt aus Proposition 3.2.2, dass X ein Gaußscher Prozess ist, da $F \in C([0,1], L^2[0,1])$ gilt. Außerdem ist $\mathcal{W}$ isonormal und X Gaußsch, folglich gilt für die Kovarianzfunktion von X:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) &= \mathbb{E}X(s)X(t) - \mathbb{E}X(s)\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X(s)X(t)\\ &= \langle (\mathcal{W}\circ F)(s), (\mathcal{W}\circ F)(t)\rangle = \langle F(s), F(t)\rangle\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t) = k(s,t)\end{aligned}$$

$\circ$

$\square$

Kapitel 5.

Beispiele Gaußscher Prozesse

In diesem Kapitel wird mithilfe von Satz 4.2.1 die Existenz der gebrochenene Brownschen Bewegungen gezeigt. Im Besonderen gehen wir dann auf den Spezialfall Brownsche Bewegung ein und zeigen die Existenz einer Version mit stetigen Pfaden. Das geschieht mit dem Satz von Kolmogorov, der davor bewiesen wird. Die Brownsche Bewegung gilt als das wichtigste Beispiel eines Gaußschen Prozesses und findet zahlreiche Anwendungen in der Finanzmathematik, wie z.B. im Black-Scholes-Modell zur Berechnung von Optionspreisen.

5.1. Gebrochene Brownsche Bewegung

Definition 5.1.1. *(Gebrochene Brownsche Bewegung)*
Sei $(X(t))_{t\in[0,1]}$ *ein Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion* k*, die gegeben ist durch*

$$k(s,t) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

mit $H \in (0,1)$*. Dann heißt* $(X(t))_{t\in[0,1]}$ *eine* gebrochene Brownsche Bewegung mit Hurst-Parameter H.

Satz 5.1.2. *(Existenz gebrochenen Brownsche Bewegung)*
Für alle $H \in (0,1)$ *existiert eine gebrochenen Brownsche Bewegung* $X : [0,1] \to L^2(\Omega)$ *mit Hurst-Parameter H.*

Beweis. Wir wenden für den Beweis Satz 4.2.1 an. Die Kovarianzfunktion einer gebrochenen Brownschen Bewegung mit Hurst-Parameter H ist nach Definition gegeben durch

$$k(s,t) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

Offensichtlich ist k symmetrisch und stetig. Es ist noch zu zeigen, dass k positiv semidefinit ist. Seien dazu $t_1, \cdots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 < \cdots < t_n$ und $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j k(t_i, t_j) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \left(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i\alpha_j \left(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H}\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\alpha_i\alpha_j|t_i - t_j|^{2H}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i\alpha_j \max\left\{|t_i|^{2H}, |t_j|^{2H}\right\}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\alpha_i\alpha_j|t_i - t_j|^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i\alpha_j \max\left\{|t_i|, |t_j|\right\}^{2H}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\alpha_i\alpha_j|t_i - t_j|^{2H}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i\alpha_j|t_i - t_j|^{2H}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\alpha_i\alpha_j|t_i - t_j|^{2H}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Wir haben mit dem letzten Satz also die Existenz einer ganzen Familie von Gaußschen Prozessen, nämlichen den gebrochenen Brownschen Bewegungen, gezeigt. Wir wollen uns nun auf den Spezialfall Brownsche Bewegung konzentrieren. Dass es sich dabei wirklich um nur um einen Spezialfall handelt, wird allerdings erst im Beweis von Satz 5.2.4 deutlich.

5.2. Brownsche Bewegung

Definition 5.2.1. *(Brownsche Bewegung)*
Ein reellwertiger stochastischer Prozess $B = (B(t))_{t\in[0,1]}$ heißt Brownsche Bewegung, falls gilt:

1. $B(0) = 0$ *fast sicher*

2. B hat unabhängige Zuwächse

3. $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s) \quad \forall 0 \le s < t \le 1$

Bemerkung. Aus der Definition lässt sich sofort schließen, dass für eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\in[0,1]}$ immer $B(t) \sim N(0,t)$ gilt.

Lemma 5.2.2. *Eine Brownsche Bewegung ist ein Gaußscher Prozess.*

Beweis. Seien $t_1, \cdots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 < \cdots < t_n$ und $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze außerdem $\alpha_0 := t_0 := 0$. Dann ist nach Definition $B(t_j) - B(t_{j-1}) \sim N(0, t_j - t_{j-1})$, also Gaußsche Zufallsvariable für $j = 1, ..., n$. Da $B(t_1) - B(t_0), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ unabhängig sind, folgt nach Lemma 2.1.5

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \alpha_j B(t_j) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j B(t_j) \\
&= \sum_{j=0}^n \left(\alpha_j \sum_{k=0}^j B(t_k) - B(t_{k-1}) \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_j B(t_0) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n \alpha_k (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_j B(0) \\
&\sim N\left(0, \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=j}^n \alpha_k \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right] \right)
\end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $\sum_{j=1}^n \alpha_j B(0)$ fast sicher 0 ist und daher die Verteilung nicht beeinflusst. Es ist also $(B(t_1), \cdots, B(t_n))$ ein Gaußscher Vektor und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.2.3. *Ein Gaußscher Prozess* $(B(t))_{t\in[0,1]}$ *ist eine Brownsche Bewegung genau dann, wenn die Kovarianzfunktion* k *gegeben ist durch*

$$k(s,t) = \min\{s,t\}.$$

Beweis. Sei $(B(t))_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Bewegung und seinen $s, t \in [0,1]$ mit $s < t$.

Dann gilt wegen $\mathbb{E}[B(t) - B(s)] = 0$ und der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B(s)B(t)] &= \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s) + B(s))B(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))B(s)\right] + \mathbb{E}\left[B(s)B(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))\right] + \operatorname{Var} B(s) \\
&= \mathbb{E}[B(t) - B(s)]\mathbb{E}[B(s) - B(0)] + s \\
&= s \\
&= \min\{s, t\}
\end{aligned}$$

Es folgt also, dass $k(s,t) = \mathbb{E}B(s)B(t) = \min\{s,t\}$ für alle $s, t \in [0,1]$.

Sei nun $(B(t))_{t\in[0,1]}$ ein Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $k(s,t) = \min\{s,t\}$.

1. Es gilt $\mathbb{E}B(0) = 0$, da B ein Gaußscher Prozess und damit $B(0)$ eine Gaußsche Zufallsvariable ist. Weiter gilt $\operatorname{Var} B(0) = \mathbb{E}B(0)B(0) = k(0,0) = 0$. Daraus folgt nach Lemma 1.1.8, dass $B(0) = 0$ fast sicher.

2. Seien $t_1, \cdots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 < \cdots < t_n$. Dann ist nach Definition $(B(t_1), \cdots, B(t_n))$ ein Gaußscher Vektor. Nun ist aber der Vektor $(B(t_2) - B(t_1), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1}))$ eine lineare Transformation von $(B(t_1), \cdots, B(t_n))$, also nach Lemma 2.2.2 ebenfalls ein Gaußscher Vektor. Für $i, j \in \{2, \cdots, n\}$, $i \neq j$, und o.B.d.A $i > j$, gilt nach Lemma 1.1.6

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left[B(t_i) - B(t_{i-1}), B(t_j) - B(t_{j-1})\right] \\
&= \operatorname{Cov}[B(t_i), B(t_j)] - \operatorname{Cov}[B(t_{i-1}), B(t_j)] \\
&\quad - \operatorname{Cov}[B(t_i), B(t_{j-1})] + \operatorname{Cov}[B(t_{i-1}), B(t_{j-1})] \\
&= \mathbb{E}B(t_i)B(t_j) - \mathbb{E}B(t_{i-1})B(t_j) - \mathbb{E}B(t_i)B(t_{j-1}) + \mathbb{E}B(t_{i-1})B(t_{j-1}) \\
&= \min\{t_i, t_j\} - \min\{t_{i-1}, t_j\} - \min\{t_i, t_{j-1}\} + \min\{t_{i-1}, t_{j-1}\} \\
&= t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Also sind die Zufallsvariablen $(B(t_2) - B(t_1), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ paarweise unkorrelliert und damit nach Satz 2.2.4 unabhängig.

3. Seien $s, t \in [0,1]$ mit $s < t$. Dann ist $B(t) - B(s)$ eine Gaußsche Zufallsvariable

und damit $\mathbb{E}[B(t)-B(s)]=0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(B(t)-B(s)) &= \mathbb{E}(B(t)-B(s))^2 \\ &= \mathbb{E}B(t)^2 - 2\mathbb{E}B(t)B(s) + \mathbb{E}B(s)^2 \\ &= k(t,t) - 2k(t,s) + k(s,s) \\ &= t - 2s + s \\ &= t - s\end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass $B(t)-B(s) \sim N(0, t-s)$.

□

Satz 5.2.4. *Die Brownsche Bewegung existiert.*

Beweis. Nach Satz 5.2.3 ist die Kovarianzfunktion k der Brownschen Bewegung gegeben durch

$$k(s,t) = \min\{s,t\} = \frac{1}{2}\left(|t| + |s| - |t-s|\right)$$

Eine Brownsche Bewegung ist also eine gebrochenen Brownsche Bewegung mit Hurst-Parameter $\frac{1}{2}$. Aus Satz 5.1.2 folgt dann aber die Existenz der Brownschen Bewegung. □

5.3. Satz von Kolmogorov

Wir haben im letzten Abschnitt also gesehen, dass die Brownsche Bewegung existiert. Nun beweisen wir noch die Existenz einer Version mit Hölder-stetigen Pfaden. Um diese Eigenschaft zu zeigen, benötigen wir aber zunächst einen wichtigen Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, den Satz von Kolmogorov. Es sei darauf hingewiesen, dass sich dessen Beweis am Beweis von [Kal06], Theorem 3.23. orientiert.

Definition 5.3.1. *(Version)*
Sei $X = (X(t))_{t\in[0,1]}$ ein reellwertiger Prozess. Wir sagen, dass ein Prozess Y eine Version von X ist, falls für $t \in [0,1]$ gilt, dass $X(t) = Y(t)$ fast überall.

Satz 5.3.2. *(Kolmogorov)*
Sei $X = (X(t))_{t\in[0,1]}$ ein reellwertiger Prozess. Es gebe reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$ und $C > 0$ mit

$$\mathbb{E}\,|X(s)-X(t)|^\alpha \le C\,|s-t|^{1+\beta} \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Dann besitzt der Prozess X für alle $0 < \delta < \frac{\beta}{\alpha}$ eine Version Y, deren Pfade Hölder-stetig der Ordnung δ sind.

Beweis. Sei $0 < \delta < \frac{\beta}{\alpha}$ beliebig, aber fest. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable Y_n durch

$$Y_n := \max_{0<j\leq 2^n : j\in\mathbb{N}} \left| X\left(\frac{j}{2^n}\right) - X\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right|.$$

<u>Beh.1</u>: *Es gilt* $\mathbb{E}(\sum_1^\infty (2^{\delta\, n} Y_n)^\alpha) < \infty$.

Es gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y_n^\alpha &= \mathbb{E}\left[\max_{0<j\leq 2^n} \left| X\left(\frac{j}{2^n}\right) - X\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right|\right]^\alpha \\
&\leq \mathbb{E}\sum_{j=1}^{2^n} \left| X\left(\frac{j}{2^n}\right) - X\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right|^\alpha \\
&\leq \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{E}\left| X\left(\frac{j}{2^n}\right) - X\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right|^\alpha \\
&\leq \sum_{j=1}^{2^n} C \left| \frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} \right|^{1+\beta} \\
&= C\, 2^{-n(1+\beta)}\, 2^n \\
&= C\, 2^{-n\beta}
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung und dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{n=1}^\infty (2^{\delta\, n} Y_n)^\alpha &= \mathbb{E}\lim_k \sum_{n=1}^k (2^{\delta\, n} Y_n)^\alpha = \lim_k \mathbb{E}\sum_{n=1}^k (2^{\delta\, n} Y_n)^\alpha \\
&= \lim_k \sum_{n=1}^k 2^{\delta\, n\, \alpha} \mathbb{E}Y_n^\alpha \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{\delta\, n\, \alpha} C 2^{-\beta\, n} \\
&= C \sum_{n=1}^\infty 2^{(\delta\alpha-\beta)n} < \infty
\end{aligned}$$

denn $\delta\alpha - \beta < 0$ und damit $2^{\delta\alpha-\beta} < 1$. $\circ$

<u>Beh.2</u>: $\sum_1^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha$ *konvergiert fast sicher.*

Sei $B \subset \Omega$ die Menge auf der $\sum_1^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha$ nicht konvergiert. Dann ist B nach Lemma A.2.7 messbar. Wir nehmen an, dass $\sum_1^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha$ nicht fast sicher konvergiert. Dann ist $\mathbb{P}(B) > 0$. Aus der Positivität der Summanden folgt $\sum_1^\infty (2^{\delta n} Y_n(\omega))^\alpha = \infty$ für alle $\omega \in B$. Dann gilt aber:

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha = \int_\Omega \left[\sum_{n=1}^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha \right] d\mathbb{P} \geq \int_B \left[\sum_{n=1}^\infty (2^{\delta n} Y_n)^\alpha \right] d\mathbb{P} = \infty$$

da $\mathbb{P}(B) > 0$. Das widerspricht aber der Behauptung 1. ◦

Im weiteren Beweis sei $A \subset \Omega$ definiert als

$$A := \{\omega \in \Omega : \exists C(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : Y_n(\omega) \leq C(\omega)\, 2^{-\delta n}\}$$

<u>Beh.3</u>: *A ist messbar.*

Es ist $A = \{\omega \in \Omega : \exists C(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{Y_n(\omega)}{2^{-\delta n}} \leq C(\omega)$. Dann ist A aber messbar nach Lemma A.2.8. ◦

<u>Beh.4</u>: *Für fast alle $\omega \in \Omega$ existiert ein $C(\omega)$, so dass $Y_n(\omega) \leq C(\omega) 2^{-\delta n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}(A) = 1$. Angenommen $\mathbb{P}(A) < 1$, dann ist $\mathbb{P}(A^c) > 0$. Sei nun $\omega \in A^c$. Dann gilt für alle K, dass $Y_n(\omega) \geq K 2^{-\delta n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, denn sonst setze $K := 1 + \max\{\frac{Y_n(\omega)}{2^{-\delta n}} : Y_n(\omega) \geq 2^{-\delta n}\}$. Also folgt insbesondere, dass $(Y_n(\omega) 2^{\delta n})^\alpha \geq 1$ unendlich oft. Daraus würde aber die Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty (Y_n(\omega) 2^{\delta n})^\alpha$ für alle $\omega \in A^c$ folgen, was im Widerspruch zur fast sicheren Konvergenz dieser Reihe steht. ◦

Sei nun für $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k := \left\{ \frac{j}{2^k} : j = 0, \dots, 2^{k-1} \right\} \text{und} \quad D := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$$

Weiterhin sei die Zufallsvariable $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$Z = \sup \left\{ |s - t|^{-\delta} |X(s) - X(t)| : s, t \in D, s \neq t \right\}$$

<u>Beh.5</u>: *Z ist fast überall endlich*

Sei $\omega \in A$. Dann gilt mit Behauptung 4:

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \sup \left\{ |s-t|^{-\delta} |X(s,\omega) - X(t,\omega)| : s,t \in D, s \neq t \right\} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup \left\{ |s-t|^{-\delta} |X(s,\omega) - X(t,\omega)| : s,t \in D, 2^{-k} < |s-t| \leq 2^{-(k-1)} \right\} \right\} \\
&\overset{*}{\leq} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{\delta k} 2 \sum_{n \geq k} Y_n(\omega) \right\} \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{\delta k} 2 \sum_{n \geq k} C(\omega) 2^{-n\delta} \right\} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \sum_{n \geq k} C(\omega) 2^{-n\delta + k\delta} \right\} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} C(\omega) 2^{-(n+k-1)\delta + k\delta} \right\} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} C(\omega) 2^{-(n-1)\delta} \right\} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} C(\omega) 2^{-(n-1)\delta} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Es folgt also $Z(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in A$ und da nach Behauptung 4 $\mathbb{P}(A) = 1$ gilt, folgt Behauptung 5. $\circ$

Es muss noch (*) gezeigt werden. Dies geschieht mit den folgenden beiden Behauptungen.

<u>Beh.6</u>: *Sei $t \in D$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0,1]$ eine Folge mit $t_n \in D_n$. Es gelte $t_n \leq t$ und $t - t_n \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_n X(t_n, \omega) = X(t, \omega)$ für alle $\omega \in A$*

Sei $t \in D$. Dann gibt es $j, k \in \mathbb{N}_0$, so dass $t = \frac{j}{2^k}$. Für $t_n = \frac{i}{2^n} \in D_n$ mit $t_n \leq t$ und $t - t_n \leq 2^{-n}$ ergibt sich

$$0 \leq t - t_n = \frac{j}{2^k} - \frac{i}{2^n} = \frac{j2^n - i2^k}{2^{n+k}} \leq 2^{-n} \text{ also } 0 \leq l := j2^n - i2^k \leq 2^k.$$

Sei nun $\omega \in A$. Dann lässt sich mit der Teleskopsumme und der Behauptung 4 schließen

$$\begin{aligned}
|X(t,\omega) - X(t_n,\omega)| &= \left| X\left(\frac{j}{2^k},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{l-1}\left[X\left(\frac{i2^k+m+1}{2^{k+n}},\omega\right) - X\left(\frac{i2^k+m}{2^{k+n}},\omega\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{l-1}\left|\left[X\left(\frac{i2^k+m+1}{2^{k+n}},\omega\right) - X\left(\frac{i2^k+m}{2^{k+n}},\omega\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{l-1} Y_{n+k}(\omega) \\
&\leq \sum_{m=0}^{l-1} C(\omega)2^{-\delta(k+n)} \\
&\leq C(\omega)2^{-\delta(k+n)}2^k \\
&= C(\omega)2^{k(1-\delta)}2^{-n\delta}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}|X(t,\omega) - X(t_n,\omega)| \leq \lim_{n\to\infty} C(\omega)2^{k(1-\delta)}2^{-n\delta} = 0$$

und somit die Behauptung. ∘

<u>Beh.7</u>: *Seien $s,t \in D$ mit $|s-t| \leq 2^{-k}$. Dann ist*

$$|X(s,\omega) - X(t,\omega)| \leq 2\sum_{n\geq k} Y_n(\omega)$$

für alle $\omega \in A$.

Seien $s,t \in D$ mit $|s-t| \leq 2^{-k}$ und $\omega \in A$. Für $n \geq k$ setzen wir $t_n := \sup\{r \in D_n : r \leq t\}$. Dann gilt $t_n \leq t$ und $t - t_n \leq 2^{-n}$. Es folgt aus Behauptung 6, dass $\lim_n X(t_n,\omega) = X(t,\omega)$. Als Teleskopsumme geschrieben ergibt sich:

$$\begin{aligned}
X(t,\omega) &= \lim_{j\to\infty} X(t_j,\omega) \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{n=k}^{j} X(t_{n+1},\omega) - X(t_n,\omega)\right) + X(t_k,\omega) \\
&= X(t_k,\omega) + \sum_{n\geq k}(X(t_{n+1},\omega) - X(t_n,\omega))
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(t_{n+1} - t_n) \in \left\{0, 2^{-(n+1)}\right\}$. Für $t_n = \frac{j}{2^n}$ folgt daraus und der Definition von Y_n

$$\begin{aligned}
|X(t_{n+1},\omega) - X(t_n,\omega)| &\leq \left| X\left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \\
&= \left| X\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}, \omega\right) \right| \\
&\leq Y_{n+1}(\omega)
\end{aligned}$$

Analog folgt für $s_n := \sup\{r \in D_n : r \leq s\}$, dass

$$X(s,\omega) = X(s_k,\omega) + \sum_{n \geq k} (X(s_{n+1},\omega) - X(s_n,\omega))$$

und

$$|X(s_{n+1},\omega) - X(s_n,\omega)| \leq Y_{n+1}(\omega)$$

Es ergibt sich dann mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
&|X(t,\omega) - X(s,\omega)| = \\
&\left| X(t_k,\omega) - X(s_k,\omega) + \sum_{n \geq k} (X(t_{n+1},\omega) - X(t_n,\omega)) - \sum_{n \geq k} (X(s_{n+1},\omega) - X(s_n,\omega)) \right| \leq \\
&|X(t_k,\omega) - X(s_k,\omega)| + \sum_{n \geq k} |(X(t_{n+1},\omega) - X(t_n,\omega))| + \sum_{n \geq k} |(X(s_{n+1},\omega) - X(s_n,\omega))| \\
&\leq |X(t_k,\omega) - X(s_k,\omega)| + 2 \sum_{n \geq k} Y_{n+1}(\omega)
\end{aligned}$$

Aus $|s - t| \leq 2^{-k}$ folgt nun $|s_k - t_k| \in \left\{0, 2^{-k}\right\}$, also ist

$$|X(t_k,\omega) - X(s_k,\omega)| \leq Y_k(\omega) \leq 2Y_k(\omega)$$

Zusammmengesetzt ergibt sich also

$$\begin{aligned}
|X(t,\omega) - X(s,\omega)| &\leq |X(t_k,\omega) - X(s_k,\omega)| + 2 \sum_{n \geq k} Y_{n+1}(\omega) \\
&\leq 2 \sum_{n \geq k} Y_n(\omega)
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Behauptung. ∘

Für alle $\omega \in A$ und für alle $s, t \in D$ gilt nach Behauptung 5

$$|X(s,\omega) - X(t,\omega)| \leq Z(\omega)\,|s-t|^{\delta}$$

d.h. die Abbildung $t \mapsto X(t,\omega)$ für $t \in D$ ist δ-Hölder-stetig. Da D dicht in $[0,1]$ ist, gibt es eine eindeutige δ-Hölder-stetige Fortsetzung $Y(t,\omega)$ auf $[0,1]$ nach Lemma A.1.13. Für $\omega \notin A$ definiere $Y(t,\omega) := 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Beh.8: Der Prozess $Y = (Y(t))_{t\in[0,1]}$ hat δ-Hölder-stetige Pfade.

Nach Konstruktion von Y ist $Y(\cdot,\omega)$ für $\omega \in A$ δ-Hölder-stetig und für $\omega \notin A$ als konstante Funktion auch δ-Hölder-stetig. $\circ$

Beh.9: Y ist Version von X.

Seit $t \in [0,1]$ beliebig und sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine Folge mit $\lim_n t_n = t$. Dann gilt nach Voraussetzung, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X(t_n) - X(t)|^{\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} C\,|t_n - t|^{1+\beta} = 0.$$

Nach Lemma A.2.4 existiert dann eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_k X(t_{n_k}) = X(t)$ fast sicher. Es gibt also eine Menge $B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(B) = 1$ und $\lim_k X(t_{n_k},\omega) = X(t,\omega)$ für alle $\omega \in B$. Desweiteren ist nach Konstruktion von Y $\lim_k X(t_{n_k},\omega) = Y(t,\omega)$ für alle $\omega \in A$. Also gilt $X(t,\omega) = Y(t,\omega)$ für alle $\omega \in A \cap B$. Da aber $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ gilt, folgt $Y(t) = X(t)$ fast überall. Das heißt Y ist Version von X. $\circ$

$\square$

Bemerkung. Wir wollen den eben bewiesenen Satz nun auf die gebrochenen Brownschen Bewegungen anwenden und die Existenz einer Version mit Hölder-stetigen Pfaden zeigen.

Satz 5.3.3. *Sei X eine gebrochene Brownsche Bewegung mit Hurst-Parameter H. Dann besitzt X für $\delta < H$ eine Version mit Hölder-stetigen Pfaden der Ordnung δ.*

Beweis. Wir untersuchen die Voraussetzungen des Satzes von Kolmogorov. Seien $s, t \in [0,1]$. Dann ist $X(t) - X(s)$ eine Gaußsche Zufallsvariable und damit $\mathbb{E}[X(t) - X(s)] = 0$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X(t)-X(s)) &= \mathbb{E}(X(t)-X(s))^2 \\
&= \mathbb{E}X(t)^2 - 2\mathbb{E}X(t)X(s) + \mathbb{E}X(s)^2 \\
&= k(t,t) - 2k(t,s) + k(s,s) \\
&= \frac{1}{2}\left(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}\right) - 2\frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(s^{2H} + s^{2H} - |s-s|^{2H}\right) \\
&= |t-s|^{2H}
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass $X(t) - X(s) \sim N(0, |t-s|^{2H})$. Damit gilt nach Definition der gebrochenen Brownschen Bewegung $X(t) - X(s) \sim N(0, |t-s|^{2H})$ und aus Satz 2.1.4 lässt sich dann für $k \in \mathbb{N}$ beliebig schließen:

$$\mathbb{E}\left[(X(t)-X(s))^{2k}\right] = (2k-1)!!\,|t-s|^{2Hk}$$

Damit erfüllt X die Vorausetzung des Satzes von Kolmogorov und es folgt, dass X eine Version hat mit Hölder-stetigen Pfaden der Ordnung δ für alle $\delta < \frac{2Hk-1}{2k}$ besitzt. Mit $k \to \infty$ ergibt sich dann aber die Behauptung. □

Bemerkung. Die Brownsche Bewegung besitzt also für $\delta < \frac{1}{2}$ eine Version mit Hölder-stetigen Pfaden der Ordnung δ.

Anhang A.

Hilfssätze

In diesem Kapitel sind eine Reihe von Hilfssätzen aus der Funktionalanalysis und der Maßtheorie bereitgestellt, die zum Großteil als bekannt vorausgesetzt werden. Als wichtigste Hilfsmittel erweisen sich hierbei der Satz von Arzela-Ascoli und der Satz von Stone-Weierstrass. Diese werden hier nicht bewiesen, die Beweise können aber in der angegebenen Literatur nachgelesen werden.

A.1. Hilfssätze der Funktionalanalysis

Satz A.1.1. *(Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung)*
Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ ein Orthonormalsystem. Für $x \in H$ gilt dann:

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{Bessel}$$

Falls S eine Orthornormalbasis von H ist, so gilt:

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 = \|x\|^2 \tag{Parseval}$$

Lemma A.1.2. *Sei H ein Hilbertraum sowie $f, g : H \to H$ stetige Funktionen. Dann ist $h : H \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ eine stetige Funktion.*

Beweis. Seien $x \in H$ und $1 > \varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist in x, gibt es ein $\delta_1 > 0$ so, dass für alle $y \in H$ mit $\|x - y\| < \delta_1$ gilt, dass $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3(\|g(x)\|+1)}$. Ebenso existiert ein $\delta_2 > 0$ so, dass $\|g(x) - g(y)\| < \frac{\varepsilon}{3(\|f(x)\|+1)}$ für alle $y \in H$ mit $\|x - y\| < \delta_2$.

Definiere nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung für $y \in H$ mit $\|x - y\| < \delta$:

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= |\langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(y), g(y)\rangle| \\ &\leq |\langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(x), g(y)\rangle| + |\langle f(x), g(y)\rangle - \langle f(y), g(y)\rangle| \\ &\leq \|f(x)\|\|g(x) - g(y)\| + \|f(x) - f(y)\|\|g(y)\| \\ &\leq \|f(x)\|\|g(x) - g(y)\| + \|f(x) - f(y)\| \left(\|g(y) - g(x)\|\|g(x)\|\right) \\ &\leq \|f(x)\|\|g(x) - g(y)\| + \|f(x) - f(y)\|\|g(x)\| + \\ &\quad\ \|f(x) - f(y)\|\|g(x) - g(y)\| \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Daraus folgt aber die Stetigkeit von h. □

Lemma A.1.3. *Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$. Dann ist $(e_n \otimes e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1]^2)$, wobei $(e_n \otimes e_n)(s,t) := e_n(s)e_n(t)$.*

Beweis. Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\langle e_n \otimes e_n, e_k \otimes e_k\rangle &= \int_0^1 \int_0^1 e_n(t)e_n(s)e_k(t)e_k(s)dsdt \\ &= \int_0^1 e_n(t)e_k(t) \int_0^1 e_n(s)e_k(s)dsdt \\ &= \delta_{nk} \int_0^1 e_n(t)e_k(t)dt \\ &= \delta_{nk}\end{aligned}$$

wobei δ_{nk} das Kronecker-Symbol bezeichnet.
Daraus folgt aber, dass $(e_n \otimes e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1]^2)$ ist. □

Lemma A.1.4. *Sei H ein Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H. Des weiteren sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Dann konvergiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n$ in H und es gilt $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2$.*

Beweis. Da $(\mu_n) \in \ell^2$ ist, gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{n=N}^{N+p} \mu_n^2 < \varepsilon$. Dann gilt aber aufgrund des Satzes von Pythagoras

$$\left\|\sum_{n=N}^{N+p} \mu_n e_n\right\|_{L^2}^2 = \sum_{n=N}^{N+p} \|\mu_n e_n(t) e_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=N}^{N+p} \mu_n^2 \|e_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=N}^{N+p} \mu_n^2 < \varepsilon$$

Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n$ eine Cauchy-Reihe in H und somit $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \mu_n e_n \in H$. Außerdem gilt mit der Stetigkeit der Norm und dem Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j e_j \right\|_{L^2}^2 &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\|_{L^2}^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 \end{aligned}$$

□

Lemma A.1.5. *(Linearität und Isometrie)*
Seien H_1, H_2 Hilberträume und $f : H_1 \to H_2$ eine Funktion mit $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist f linear und isometrisch.

Beweis.

<u>*Beh.1*</u>*: f ist linear*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y \in H_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\|f(\alpha x + \beta y) - ((\alpha f(x) + \beta f(y))\|^2 \\ &= \langle f(\alpha x + \beta y) - (\alpha f(x) + \beta f(y)), f(\alpha x + \beta y) - (\alpha f(x) + \beta f(y))\rangle \\ &= \langle f(\alpha x + \beta y, f(\alpha x + \beta y)\rangle - 2 \langle f(\alpha x + \beta y, \alpha f(x) + \beta f(y)\rangle \\ &\quad + \langle \alpha f(x) + \beta f(y), \alpha f(x) + \beta f(y)\rangle \\ &= \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle - 2\alpha \langle \alpha x + \beta y, x\rangle - 2\beta \langle \alpha x + \beta y, y\rangle + \alpha^2 \langle x, x\rangle \\ &\quad + 2\alpha\beta \langle x, y\rangle + \beta^2 \langle y, y\rangle \\ &= 2\alpha^2 \langle x, x\rangle + 4\alpha\beta \langle x, y\rangle + 2\beta^2 \langle y, y\rangle - 2\alpha\beta \langle x, y\rangle - 2\beta^2 \langle y, y\rangle - 2\alpha^2 \langle x, x\rangle \\ &\quad - 2\alpha\beta \langle x, y\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt: $\|f(\alpha x + \beta y) - (\alpha f(x) + \beta f(y))\| = 0$ und somit
$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. ◦

<u>*Beh.2*</u>*: f ist isometrisch*

Für $x \in H$ gilt $\|f(x)\| = (\langle f(x), f(x)\rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$. ◦

□

Satz A.1.6. *Sei $k \in L^2([0,1]^2)$. Definiere*

$$Q_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), (Q_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt.$$

Dann ist Q_k ein stetiger linearer Operator. Wir nennen Q_k den zu k zugehörigen Integraloperator.

Beweis.

Beh.1: Q_k bildet nach $L^2([0,1])$ ab, d.h. $Q_k f \in L^2([0,1])$ für alle $f \in L^2([0,1])$

Nach der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini folgt:

$$\begin{aligned}
\|Q_k f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 k(s,t)f(t)dt \right|^2 ds \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)||f(t)|dt \right)^2 ds \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2 dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right) ds = \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 dt ds \|f\|_{L^2}^2 \\
&= \|k\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 < \infty
\end{aligned}$$

$\circ$

Beh.2: Q_k ist linear

Seien $f, g \in L^2([0,1])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(Q_k(\alpha f + \beta g))(s) &= \int_0^1 k(s,t)(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\
&= \alpha \int_0^1 k(s,t)f(t)dt + \beta \int_0^1 k(s,t)g(t)dt \\
&= \alpha (Q_k f)(s) + \beta (Q_k g)(s)
\end{aligned}$$

Also ist Q_k linear. $\circ$

Beh.3: Q_k ist stetig

Aus dem Beweis von Behauptung 1 folgt für $f \in L^2([0,1])$, dass $\|Q_k f\| \leq \|k\|_{L^2} \|f\|$. Da Q_k linear ist, folgt daraus sofort die Stetigkeit. $\circ$

$\square$

Satz A.1.7. *Sei $k \in L^2([0,1]^2)$. Dann ist der zugehörige Integraloperator $Q_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ kompakt.*

Beweis. [Wer07, Seite 67, Beispiel (c)] □

Satz A.1.8. *(Satz von Arzela-Ascoli)*
Sei (S,d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $M \subset C(S)$ mit der Supremumsnorm versehen. Die Teilmenge M sei beschränkt und gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M \quad d(s,t) \leq \delta \Longrightarrow |x(s) - x(t)| \leq \varepsilon$$

Dann ist M relativkompakt.

Beweis. [Die69, Theorem 7.5.7] □

Satz A.1.9. *Sei $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig und sei $H_0 = C[0,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ und $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt erzeugte Norm. Dann ist der Operator $Q_k : H_0 \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ linear und stetig. Des weiteren ist Q_k kompakt.*

Beweis.

<u>*Beh.1*</u>*: Q_k bildet nach $C[0,1]$ ab, d.h. $Q_k(f)$ ist stetig für alle $f \in H_0$*

Sei $f \in H_0$ beliebig und sei $K > 0$ mit $\|f\| < K$. Da k stetig und $[0,1]^2$ kompakt ist, folgt sofort die gleichmäßige Stetigkeit von k. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so, dass gilt:

$$\|(s,t) - (s',t')\| < \delta \Rightarrow |k(s,t) - k(s',t')| < \frac{\varepsilon}{K}$$

Dann folgt für $|s - s'| < \delta$ mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|(Q_k f)(s) - (Q_k f)(s')| &= |\int_0^1 (k(s,t) - k(s',t))f(t)dt| \\
&\leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s',t)||f(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{K}|f(t)|dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{K}\left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\varepsilon}{K}\|f\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Also bildet Q_k nach $C[0,1]$ ab. ∘

Beh.2: Q_k ist linear

Beweis verläuft analog zum Beweis in Satz A.1.6. $\circ$

Beh.3: Q_k ist stetig.

Sei $f \in H_0$ mit $\|f\| = 1$. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|Q_k f\|_\infty &= \sup_{s\in[0,1]} |(Q_k f)(s)| \\
&= \sup_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(s,t) f(t) dt \right| \\
&\leq \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)||f(t)| dt \\
&\leq \sup_{s\in[0,1]} \left(\int_0^1 k(s,t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \\
&\leq \|k\|_\infty
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort die Stetigkeit von Q_k. $\circ$

Beh.4: Q_k ist kompakt

Wir zeigen die Kompaktheit von Q_k mit Hilfe von Satz A.1.8(Arzela-Ascoli). Es ist nach Behauptung 1 $Q_k(B_{H_0}) \subset C([0,1])$. Außerdem gilt nach Behauptung 3 $\|Q_k f\|_\infty \leq \|k\|_\infty$ für alle $f \in B_{H_0}$. Daraus folgt aber sofort die Beschränktheit von $Q_k(B_{H_0})$. Da also ein $K > 0$ mit $Q_k(B_{H_0}) \subset B_K$ existiert, lässt sich mit Hilfe von Behauptung 1 die gleichgradige Stetigkeit schließen. Dann ist aber nach dem Satz von Arzela-Ascoli $Q_k(B_{H_0})$ relativkompakt und damit Q_k kompakt. $\circ$

$\square$

Definition A.1.10. *(Algebra)*
Sei (E,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset C_b(E,\mathbb{K})$ heißt Algebra*, falls*

(i) $1 \in \mathcal{C}$

(ii) für $f, g \in \mathcal{C}$ sind $fg \in \mathcal{C}$ und $f + g \in \mathcal{C}$

(iii) für $f \in \mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha f) \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ heißt Punkte trennend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in E$ mit $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{C}$ gibt mit $f(x) \neq f(y)$.*

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *heißt* $\mathcal{C}$ abgeschlossen bezüglich komplexer Konjugation*, falls für* $f \in \mathcal{C}$ *auch* $\overline{f} \in \mathcal{C}$.

Satz A.1.11. *(Satz von Stone-Weierstraß)*
Sei E ein kompakter metrischer Raum und sei $\mathcal{C} \subset C_b(E, \mathbb{K}$ eine Punkte trennende Algebra. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei $\mathcal{C}$ außerdem abgeschlossen bezüglich der komplexen Konjugation. Dann liegt $\mathcal{C}$ dicht in $C_b(E, \mathbb{K})$ bezüglich der Supremumsnorm.

Proof. [Kle08, Satz 15.2] □

Definition A.1.12. *(δ-Hölder-Stetigkeit)*
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\delta \in \mathbb{R}^+$. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt δ-Hölder-stetig*, falls gilt es ein $C \in \mathbb{R}^+$ gibt mit*

$$d_Y(f(s), f(t)) \leq C d_X(s, t)^\delta \qquad \forall s, t \in X$$

Bemerkung. Eine δ-Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig und jede konstante Funktion ist δ-Hölder-stetig.

Lemma A.1.13. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, (Y, d_Y) vollständig, $\delta \in \mathbb{R}^+$ und A eine dichte Teilmenge von X. Ferner sei $f : A \to Y$ eine δ-Hölder-stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutige δ-Hölder-stetige Fortsetzung von f auf X.*

Beweis. Es ist f δ-Hölder-stetig. Also existiert ein $C > 0$ so, dass $d_Y(f(s), f(t)) \leq C d_X(s, t)^\delta$ für alle $s, t \in A$.

<u>Beh.1</u>: *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Dann konvergiert $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in Y.*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Folge (a_n) konvergiert in X, ist also ein Cauchy-Folge. Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d_X(a_n, a_m) < \varepsilon^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{C}$. Dann gilt aber durch die δ-Hölder-Stetigkeit für alle $n, m \geq N$

$$d_Y(f(a_n), f(a_m)) \leq C d_X(a_n, a_m)^\delta < \varepsilon$$

Also ist $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in Y und da Y vollständig ist konvergiert sie auch. ∘

<u>Beh.2</u>: *Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in A mit $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$. Dann gilt auch $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n)$*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) und (b_n) den gleichen Grenzwert besitzen, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d_X(a_n, b_n) < \varepsilon^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{C}$ für alle $n \geq N$. Durch die δ-Hölder-Stetigkeit von f ergibt sich dann $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \leq C d_X(a_n, b_n)^\delta < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt aber die Behauptung. ○

Sei nun $x \in X$. Da A dicht in X liegt, existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A für die gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Definiere nun $g(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Dann ist g nach den Behauptungen 1 und 2 wohldefiniert.

Beh.3: *g ist δ-Hölder-stetig*

Seien $x, y \in X$ sowie $(a_n), (b_n) \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = y$. Dann gilt durch die δ-Hölder-Stetigkeit von f und Behauptung 2

$$\begin{aligned} d_Y(g(x), g(y)) &\leq d_Y(g(x), g(a_n)) + d_Y(g(a_n), g(b_n)) + d_Y(g(b_n), g(y)) \\ &= d_Y(g(x), f(a_n)) + d_Y(f(a_n), f(b_n)) + d_Y(f(b_n), g(y)) \\ &\leq d_Y(g(x), f(a_n)) + C d_X(a_n, b_n)^\delta + d_Y(f(b_n), g(y)) \\ &\leq d_Y(g(x), f(a_n)) + C \left[d_X(a_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, b_n)\right]^\delta \\ &\qquad + d_Y(f(b_n), g(y)) \\ &\longrightarrow C d_X(x, y)^\delta \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort die δ-Hölder-Stetigkeit von g. ○

Beh.4: *Die Fortsetzung ist eindeutig.*

Seien g und h δ-Hölder-stetige Fortsetzungen von f auf X. Dann sind f und g insbesondere stetig und stimmen auf einer dichten Teilmenge von X überein. Daraus folgt, dass $f = g$. ○

□

A.2. Hilfssätze der Maßtheorie

Satz A.2.1. *(Differentation von Parameterintegralen)*
Sei $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t, \cdot)$ integrierbar über Ω

(b) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$

(c) Es gibt eine über Ω integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|f_t(t, \omega)| \leq g(\omega)$ für alle $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Dabei bezeichne f_t die partielle Ableitung von f nach t.

Dann ist die durch das Parameterintegral

$$h(t) := \int_\Omega f(t,\cdot)d\mu$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}$ *differenzierbar, und es gilt*

$$h'(t) := \int_\Omega f_t(x,\cdot)d\mu$$

Beweis. [Els09, Satz 5.7] □

Satz A.2.2. *Sei* μ *ein endliches Maß auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. *Dann ist* μ *regulär von innen, d.h. für alle* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *gilt:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \quad \textit{ist kompakt}\}$$

Beweis. [Kle08, Satz 13.6] □

Lemma A.2.3. *Es sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *ein endlicher Maßraum und* $g_n, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *messbare Funktionen mit zugehörigen Bildmaßen* μ_n *und* μ. *Konvergiert* g_n *fast sicher gegen* g, *so folgt für jedes* $f \in C_b(\mathbb{R})$, *dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f d\mu_n = \int_\mathbb{R} f d\mu$$

Beweis. [Els09, Satz 4.8] □

Lemma A.2.4. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *ein Maßraum und* $f_n, f \in L^p$ *mit* $0 < p \leq \infty$. *Falls* $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ *gilt, so existiert eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_{n_k} \to f$ *fast sicher.*

Beweis. [Els09, Satz 4.3] und [Els09, Korollar 4.13] □

Definition A.2.5. *(Rechteckmenge)*
Sei I *eine beliebige Indexmenge und* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ *messbare Räume für* $i \in I$. *Definiere* $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$. *Dann heißt eine Menge* $A \in \Omega$ Rechteckmenge, *falls es eine endliche Menge* $J \subset I$ *derart gibt, dass*

$$A = \prod_{j\in J} A_j \times \prod_{i\notin J} \Omega_i \quad \text{mit} \quad A_j \in \mathcal{A}_j, j \in J$$

Satz A.2.6. *Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ Wahrscheinlichkeitsräume für $i \in I$. Definiere $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$ und es sei $\mathcal{A}$ die von den Rechteckmengen erzeugte Sigma-Algebra auf Ω. Dann existiert auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maß μ derart, dass für jede Rechteckmenge A mit Darstellung $A = \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \notin J} \Omega_i$ gilt:*

$$\mu(A) = \mu(\prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \notin J} \Omega_i) = \prod_{j \in J} \mu_j(A_j)$$

Beweis. [Bog07, Unterkapitel 3.5] □

Satz A.2.7. *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger messbarer Funktionen und $A := \{\omega \in \Omega : (f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}\}$. Dann ist A messbar.*

Beweis. Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist. Wir können A also darstellen als

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : \forall q \in \mathbb{Q}_+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N : |f_m(\omega) - f_N(\omega)| < q\} \\ &= \bigcap_{q \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq N} \{\omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f_N(\omega)| < q\} \end{aligned}$$

Da nun aber die Mengen $\{\omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f_N(\omega)| < q\}$ messbar sind, ist auch A als abzählbare Vereinigung und Durchschnitt messbarer Mengen messbar. □

Satz A.2.8. *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger messbarer Funktionen und $A := \{\omega \in \Omega : (f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}\}$. Dann ist A messbar.*

Beweis. Wir können die Menge A folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : \exists K \in \mathbb{Q}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(\omega)| < K\} \\ &= \bigcup_{K \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : |f_n(\omega)| < K\} \end{aligned}$$

Da aber die Mengen $\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega)| < K\}$ messbar sind, ist auch A als abzählbare Vereinigung und Durchschnitt messbarer Mengen messbar. □

Anhang B.

Satz von Mercer

In diesem Kapitel wollen wir den Satz von Mercer beweisen. Er ist ein wichtiges Resultat der Spektraltheorie für Integraloperatoren und besagt, dass eine positiv semidefinite und symmetrische Kernfunktion $k \in C[0,1]^2$ geschrieben werden kann als $k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n \otimes e_n)$, wobei e_n ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren des zugehörigen Integraloperators ist und λ_n ein zu e_n gehöriger Eigenwert. Zum Beweis benötigen wir einige Aussagen, die auch für sich allein stehend sehr interessant sind wie der Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren oder der Satz von Dini. Der Aufbau des Beweises orientiert sich hierbei an [Wer07, VI.4.]

B.1. Hilfssätze für den Satz von Mercer

Satz B.1.1. *(Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren)*
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und $T : H \to H$ kompakt und symmetrisch. Dann existiert ein abzählbares Orthonormalsystem $e_1, e_2, ...$ aus Eigenvektoren von T, so dass

$$H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{lin}\{e_1, e_2, ...\}}$$

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \qquad \forall x \in H$$

wobei $\lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Eigenwert zu e_k ist.

Beweis. [Wer07, Theorem VI.3.2] $\square$

Lemma B.1.2. *Sei H ein Hilbertraum und H_0 eine dichter Unterraum von H. Außerdem seien $T : H \to H$ ein linearer Operator und $T_0 = T_{|H_0}$ die Einschränkung von T auf H_0. Falls T_0 nach H_0 abbildet sowie symmetrisch und kompakt ist, liegt jeder Eigenvektor e_n von T in H_0.*

Beweis. [Wer07, Satz VI.4.1] □

Satz B.1.3. *(Satz von Dini)*
Sei T ein kompakter metrischer Raum sowie $f, f_1, f_2, \ldots : T \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ und $f = \sup f_n$ punktweise. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

Beweis. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, gibt es zu jedem $t \in T$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_t mit $f(t) - \varepsilon < f_{N_t}(t)$. Da aber f und f_{N_t} stetig sind, gibt es zu jedem $t \in T$ eine Umgebung $U_t^{N_t}$ mit $f(y) - \varepsilon < f_{N_t}(y)$ für alle $y \in U_t^{N_t}$. Offensichtlich ist $T \subset \cup_{t\in T} U_t^{N_t}$. Da aber T kompakt ist, existiert ein endliches $T' \subset T$ mit $T \subset \cup_{t\in T'} U_t^{N_t}$. Sei nun $N := \max_{t\in T'} N_t$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und für alle $t \in T$, dass $f(t) - \varepsilon < f_N(t) \leq f_n(t) \leq f(t)$, da f_n monoton wächst. Daraus folgt aber die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f. □

Lemma B.1.4. *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Für einen kompakten und symmetrischen Operator $T : H \to H$ sind äquivalent:*

(i) Alle Eigenwerte von T sind nichtnegativ

(ii) T ist formpositiv

Beweis. Es seien zunächst alle Eigenwerte λ_k von T nichtnegativ. Dann gilt nach dem Spektralsatz(B.1.1):

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \left\langle \sum_k \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k, x \right\rangle = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k\rangle \langle e_k, x\rangle \\ &= \sum_k \lambda_k \langle x, e_k\rangle^2 \geq 0\end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass T formpositiv ist.
Sei nun T formpositiv, also $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$. Dann gilt insbesondere $\langle Te_k, e_k\rangle \geq 0$ für alle Eigenvektoren e_k. Sei λ_k Eigenwert von dem normierten Eigenvektor e_k. Dann folgt

$$\lambda_k = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k \langle e_k, e_k\rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k\rangle = \langle Te_k, e_k\rangle \geq 0$$

Also sind alle Eigenvektoren von T nichtnegativ. □

Lemma B.1.5. *Sei $k \in L^2([0,1]^2)$ symmetrisch und $Q_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ mit $(Q_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt$. Dann existiert ein Orthonormalsystem (e_n) von Eigenfunktionen mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derart, dass $Q_k f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$ für alle $f \in L^2[0,1]$. Außerdem ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.*

Beweis. Nach Lemma A.1.7 ist Q_k kompakt und nach Satz 4.1.5 symmetrisch. Also folgt die Existenz eines Orthonormalsystems (e_n) von Eigenfunktionen mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derart, dass $Q_k f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$ für alle $f \in L^2[0,1]$ direkt aus dem Spektralsatz. Sei außerdem S eine Orthonormalbasis von $\ker Q_k$. Dann gilt nach dem Spektralsatz und der Parsevalschen Gleichung für jedes $f \in L^2([0,1]^2)$, dass $f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n + \sum_{e\in S} \langle f, e \rangle e$. Sei nun $e \in S$ und $s \in [0,1]$. Dann gilt

$$0 = (Q_k e)(s) = \int_0^1 k(s,t) e(t) dt = \langle k(s,\cdot\,, e \rangle$$

Daraus folgt sofort, dass $\langle k(s,\cdot\,), e \rangle = 0$ für alle $e \in S$. Also besitzt $k(s,\cdot\,)$ die Darstellung

$$k(s,\cdot\,) = \sum_n \langle k(s,\cdot\,), e_n \rangle e_n + \sum_{e\in S} \langle k(s,\cdot\,), e \rangle e = \sum_n \langle k(s,\cdot\,), e_n \rangle e_n$$

Für e_n gilt außerdem

$$\lambda_n e_n(s) = (Q_k e_n)(s) = \int_0^1 k(s,t) e_n(t) dt = \langle k(s,\cdot\,), e_n \rangle$$

Nach der Parsevalschen Gleichung A.1.1 folgt dann:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |k(s,t)|^2 dt = \|k(s,\cdot\,)\|_{L^2}^2 = \|\sum_n \langle k(s,\cdot\,), e_n \rangle e_n\|_{L^2}^2 = \sum_n |\langle k(s,\cdot\,), e_n \rangle|^2 \\ = \sum_n |\lambda_n e_n(s)|^2 = \sum_n \lambda_n^2 |e_n(s)|^2 \end{aligned}$$

Da die Eigenfunktionen messbar sind, sowie $\lambda_n^2 |e_n(s)|^2 \geq 0$, kann man mit dem Satz von Beppo-Levi schließen

$$\begin{aligned} \|k\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 dt ds = \int_0^1 \sum_n \lambda_n^2 |e_n(s)|^2 ds \\ &= \sum_n \lambda_n^2 \int_0^1 |e_n(s)|^2 ds = \sum_n \lambda_n^2 \|e_n\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_n \lambda_n^2 < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. □

Lemma B.1.6. *Sei $k \in C([0,1]^2)$ symmetrisch und $Q_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ mit $(Q_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt$. Dann sind alle Eigenfunktionen stetig.*

Beweis. Sei $H = L^2([0,1])$ und $H_0 = C[0,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Dann ist H_0 dichter Unterraum von H nach [Wer07, Satz I.2.12]. Sei nun Q_0 die Einschränkung von Q_k auf H_0. Dann bildet nach Satz A.1.9 Q_0 nach H_0 ab und ist symmetrisch und kompakt. Aus Lemma B.1.2 folgt also, dass die Eigenfunktionen in H_0 liegen. Damit sind sie aber insbesondere stetig. $\square$

Satz B.1.7. *Sei $k \in C([0,1]^2)$ symmetrisch und $Q_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ der zugehörige Integraloperator. Außerdem seien $e_1, e_2, \ldots$ sowie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ wie im obigen Satz B.1.5. Für $f \in C[0,1]$ gilt dann*

$$Q_k f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j,$$

wobei die Reihe gleichmäßig und absolut bezüglich der L^2-Norm konvergiert.

Beweis. Wir wissen aus dem Spektralsatz, dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \to Q_k x$ in L^2. Es gilt also die absolute Konvergenz bezüglich der L^2-Norm und die gleichmäßige Konvergenz zu überprüfen.

<u>Beh.1</u>: *Die Folge $(\langle f, e_j \rangle)$ liegt in ℓ^2*

Nach der Besselschen Ungleichung A.1.1 gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$, also konvergiert die Reihe. Daraus folgt aber die Behauptung. $\circ$

<u>Beh.2</u>: *$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j$ konvergiert absolut bezüglich der L^2-Norm*

Da nach Behauptung 1 $(\langle f, e_j \rangle)$ in ℓ^2 und nach Lemma B.1.5 (λ_j) in ℓ^2 liegt, folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j\|_{L^2} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j \langle f, e_j \rangle| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$\circ$

Es ist also noch zu zeigen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Wir wollen das mit dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz machen.

<u>Beh.3</u>: *$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j e_j(s)|^2 \leq \|k\|_{\infty}^2$ für alle $s \in [0,1]$*

Sei $s \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt mit der Besselschen Ungleichung A.1.1

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j e_j(s)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Q_k e_j)(s)|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_0^1 k(s,t) e_j(t) dt \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle k(s,\cdot), e_j \rangle|^2 \leq \|k(s,\cdot)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_0^1 |k(s,t)|^2 dt \leq \|k\|_\infty^2\end{aligned}$$

$\circ$

<u>Beh.4</u>: *Für alle $\gamma > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $s \in [0,1]$ gilt:*

$$\sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j(s)| < \gamma$$

Sei $\gamma > 0$ beliebig. Nach Behauptung 1 ist $(\langle f, e_j \rangle) \in \ell^2$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=N}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 < \left(\frac{\gamma}{\|k\|_\infty + 1} \right)^2$. Da außerdem nach Behauptung 3 $(\lambda_j e_j(s)) \in \ell^2$ gilt, folgt aus der Hölderschen Ungleichung für alle $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j(s)| &\leq \left(\sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j e_j(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=N}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \|k\|_\infty \frac{\gamma}{\|k\|_\infty + 1} \\ &\leq \gamma\end{aligned}$$

$\circ$

Aus Behauptung 4 folgt dann, dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, e_j \rangle e_j$ die Bedingung für das Cauchy-Kriterium erfüllt, also konvergiert die Reihe gleichmäßig. $\square$

B.2. Satz von Mercer

Satz B.2.1. *(Satz von Mercer)*
Sei $k \in C([0,1]^2)$ symmetrisch und positiv, sowie

$$Q_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1], Q_k(f) = \int_0^1 k(\cdot\,,t) f(t) dt$$

der zugehörige Integraloperator. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenvektoren mit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ derart, dass

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n \otimes e_n)$$

wobei λ_n der zu e_n zugehörige Eigenwert ist und $(e_n \otimes e_n)(s,t) := e_n(s)e_n(t)$ ist. Die Konvergenz der Reihe ist gleichmäßig und alle λ_n nichtnegativ. Des weiteren gilt $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Beweis. Wir wissen aus dem Spektralsatz, dass es ein Orthonormalsystem (e_n) von Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten λ_n gibt, so dass $Q_k f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n\rangle e_n$ für alle $f \in L^2([0,1])$. Nach Lemma B.1.6 sind die e_n stetig. Außerdem sind nach Lemma B.1.4 die Eigenwerte nichtnegativ sowie nach Lemma B.1.5 in ℓ^2. Definiere nun

$$k_n := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (e_j \otimes e_j)$$

<u>Beh.1</u>: *k_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$*

Es gilt $k_n(s,t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j(s)e_j(t)$. Da die Eigenfunktionen e_j stetig sind, ist k_n als Summe und Produkt stetiger Funktionen wieder stetig. $\circ$

<u>Beh.2</u>: *Definiere $g_n := k - k_n$. Dann ist g_n positiv semidefinit und symmetrisch für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und sei Q der zu g_n zugehörige Integraloperator. Für $f \in L^2[0,1]$ gilt dann mit dem Spektralsatz und der Stetigkeit der Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}
\langle Qf, f\rangle &= \left\langle \int_0^1 (k-k_n)(\cdot,t)f(t)dt, f \right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^1 k(\cdot,t)f(t)dt, f \right\rangle - \left\langle \int_0^1 k_n(\cdot,t)f(t)dt, f \right\rangle \\
&= \langle Qf, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j, f\rangle \int_0^1 e_j(t)f(t)dt \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, e_j\rangle e_j, f \right\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f, e_j\rangle \langle e_j, f\rangle \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |\langle f, e_j\rangle|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

da die λ_j Eigenwerte von Q_k und daher nach Lemma B.1.4 nichtnegativ sind.
Wir haben also gesehen, dass Q formpositiv ist und nach Satz 4.1.7 ist damit g_n positiv semidefinit. Die Symmetrie von g_n folgt sofort, da sowohl k als auch k_n symmetrisch sind. $\circ$

<u>Beh.3</u>: $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j(t)|^2 \leq \|k\|_\infty$ für alle $t \in [0,1]$

Sei $t \in [0,1]$ beliebig. Nach Behauptung 3 ist g_n positiv semidefinit, also gilt für beliebige $t_1, ..., t_m \in [0,1]$ und beliebige $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$, dass $\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j g_n(t_i, t_j) \geq 0$. Setze nun $a_1 = a_2 = 1$ und $t_1 = t_2 = t$. Dann ist $\sum_{i,j=1}^{2} a_i a_j g_n(t_i, t_j) = 4g_n(t,t) \geq 0$, also gilt $k_n(t,t) \leq k(t,t)$. Daraus folgt aber

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |e_j(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} k_n(t,t) \leq k(t,t) \leq \|k\|_\infty$$

$\circ$

<u>Beh.4</u>: Für jedes feste $s \in [0,1]$ konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j$ gleichmäßig

Seien $\varepsilon > 0$ und $s \in [0,1]$ beliebig, aber fest. Dann existiert nach Behauptung 3 ein $N_s \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{j=N_s}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2 < \varepsilon$. Dann gilt für $t \in [0,1]$ beliebig mit Behauptung 3 und der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{j=N_s}^{\infty} |\lambda_j e_j(s) e_j(t)| \leq \left(\sum_{j=N_s}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=N_s}^{\infty} \lambda_j |e_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (\varepsilon \|k\|_\infty)^{\frac{1}{2}}$$

Nach dem Satz von Cauchy über die gleichmäßige Konvergenz von Reihen folgt dann die Behauptung. $\circ$

<u>Beh.5</u>: Definiere $m := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e_j \otimes e_j)$. Dann ist $m \in L^2([0,1]^2)$.

Wir wissen aus Lemma A.1.3, dass $e_j \otimes e_j$ mit $(e_j \otimes e_j)(s,t) := e_j(s) e_j(t)$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1]^2)$ bildet. Außerdem ist nach Lemma B.1.5 $(\lambda_n) \in \ell^2$. Dann folgt die Behauptung aber aus Lemma A.1.4. $\circ$

<u>Beh.6</u>: Es gilt $m = k$.

Sei $s \in [0,1]$ beliebig, aber fest. Definiere $h(t) := k(s,t) - m(s,t)$. Nach Behauptung 5 ist $m(s,\cdot)$ stetig, da $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j$ für festes s gleichmäßig konvergiert. Da außerdem k stetig ist, folgt die Stetigkeit von h.

Sei nun $f \in C([0,1])$. Dann gilt mit dem Spektralsatz und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(t)f(t)dt &= \int_0^1 k(s,t)f(t)dt - \int_0^1 m(s,t)f(t)dt \\
&= (Q_k f)(s) - \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t) \right) f(t)dt \\
&= (Q_k f)(s) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j e_j(s) \int_0^1 e_j(t) f(t)dt \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) \langle f, e_j \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) \langle f, e_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da wie oben angemerkt h stetig ist, gilt insbesondere $\int_0^1 h(t)h(t)dt = \langle h, h \rangle = 0$, also $h = 0$. Daraus folgt aber $m(s,t) = k(s,t)$ für alle $s, t \in [0,1]$. $\circ$

<u>*Beh.7*</u>*: $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (e_j \otimes e_j)$ konvergiert gleichmäßig gegen k.*

Nach Behauptung 7 gilt insbesondere für alle $s \in [0,1]$, dass $k(s,s) = m(s,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2$. Definiere $f(s) := k(s,s)$ und $f_n(s) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |e_j(s)|^2$. Dann sind $f, f_1, f_2, ... : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gilt $f_1 \leq f_2 \leq ...$ und $f = \sup f_n$ punktweise. Nach dem Satz von Dini B.1.3 konvergiert also die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2$ gleichmäßig. Daraus folgt, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $s \in [0,1]$ gilt: $\sum_{j=N}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2 < \varepsilon^2$. Nach Behauptung 3 und der Hölderschen Ungleichung gilt also für alle $s, t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j e_j(s) e_j(t)| &\leq \left(\sum_{j=N}^{\infty} \lambda_j |e_j(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=N}^{\infty} \lambda_j |e_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\varepsilon \|k\|_{\infty})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig und zwar wegen Behauptung 7 gegen k. $\circ$

$\square$

Bemerkung. Das folgende Beispiel zeigt, dass der Satz von Mercer ohne die positive Semidefinitheit i.A. nicht gilt.

Beispiel. Sei $k(s,t) := |s - t|$. Dann ist k symmetrisch, aber nicht positiv semidefinit. Angenommen der Satz von Mercer würde gelten. Dann folgt aufgrund der gleichmäßigen

Konvergenz der Reihe:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 k(s,s)ds = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_0^1 e_n(s) e_n(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\lambda_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. und damit $\lambda_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also wäre $k = 0$, was ein Widerspruch ist.

Literaturverzeichnis

[Bog07] Bogachev, V. I.: *Measure theory. Vol. I.* 1. Aufl. 2007

[Die69] Dieudonne, Jean: *Foundations of Modern Analysis.* 2. Aufl. 1969

[Els09] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* 6. Aufl. 2009

[Heu09] Heuser, Harro: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 6. Aufl. 2009

[Kal06] Kallenberg, Olav: *Foundations of Modern Probability.* 2. Aufl. 2006

[Kle08] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* 2. Aufl. 2008

[Wer07] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis.* 6. Aufl. 2007

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewußt, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, den 31. Mai 2014

(Unterschrift)