Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Das Inhaltsproblem

Bachelorarbeit

in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von
Marcel Kreuter
am 03.09.2012

Gutachter

Prof. Dr. Wolfgang Arendt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Messen von Längen, Flächen und Volumina (im Folgenden allgemein als Volumen bezeichnet) ist eine der ältesten mathematischen Disziplinen. Schon die griechischen Mathematiker vor mehr als 2000 Jahren beschäftigten sich damit, wobei für sie die Suche nach Formeln zur Berechnung von geometrischen Größen, wie dem Kreisumfang oder dem Kugelinhalt, im Vordergrund stand. Die Mathematiker Anfang des 20. Jahrhunderts fragten sich eher, ob und wie das Volumen in der realen Welt auf den Raum $\mathbb{R}^d$ übertragen werden kann, in dem viele Mengen denkbar sind, die in der Realität nicht existieren können.

Der erste Schritt dieses Problem anzugehen, ist die Angabe einer mathematischen Charakterisierung des Volumens. Die heute übliche Definition geht auf die Dissertation von Henri Léon Lebesgue aus dem Jahr 1902 zurück, in der er das sogenannte *Maßproblem* stellte: Gibt es eine Funktion, die jeder Teilmenge des d-dimensionalen, reellen Raumes einen Wert zwischen 0 und ∞ zuweist und dabei die folgenden drei Eigenschaften erfüllt?

- Der Wert der Vereinigung (eventuell abzählbar unendlich vieler) disjunkter Mengen ist die Summe der Werte der einzelnen Mengen. (σ-Additivität)
- Sind zwei Mengen deckungsgleich, so wird ihnen der gleiche Wert zugewiesen. (Bewegungsinvarianz)
- Der Wert des Einheitswürfels ist 1. (Normierung)

Lebesgue selbst versuchte in seiner Arbeit eine Lösung zu konstruieren, konnte ihre Existenz aber nur für eine große Klasse von Mengen, die wir heute als Lebesgue-Borel-Mengen bezeichnen, nachweisen. Diese Mengen umfassen einen sehr großen Teil der Mengen, die in Anwendungen auftreten, beispielsweise alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen. Im ersten Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Konstruktion der heute als Lebesguemaß bezeichneten Funktion über den vereinfachten Weg, den Constantin Carathéodory 1914 fand.

Mit einem Gegenbeispiel konnte Giuseppe Vitali bereits 1905 zeigen, dass die von Lebesgue gesuchte Funktion nicht existiert. Fraglich ist, ob eine andere, vereinfachte Definition uns vor ein lösbares Problem stellt und damit eventuell einen besseren Volumenbegriff liefert. Dazu müssen die Anforderungen an die Funktion abgeschwächt werden ohne aber dabei das Ziel aus den Augen zu verlieren, eine sinnvolle Definition für das Volumen zu finden. Das Problem, das wir im zweiten und dritten Teil dieser Arbeit behandeln werden, ist das *Inhaltsproblem.* Es unterscheidet sich von Lebesgues

Maßproblem nur darin, dass statt der σ-Additivität lediglich die Additivität endlich vieler Mengen gefordert wird. Das heißt allerdings nicht, dass die σ-Additivität eine unwichtige Eigenschaft ist. Ein Beispiel für ihre Notwendigkeit ist die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises durch Archimedes. Der Kreis wird durch eine monotone Folge regelmäßiger n-Ecke, deren Fläche und Umfang leicht zu berechnen sind, von innen (bzw. außen) angenähert. Erst im Grenzfall $n \to \infty$ ergibt sich der Kreis, der sich also als Vereinigung abzählbar vieler Vielecke schreiben lässt.

Da für das Gegenbeispiel von Vitali die σ-Additivität unverzichtbar ist, lässt es sich nicht auf das Inhaltsproblem übertragen. Dennoch bewies Felix Hausdorff 1914, dass auch dieses Problem in höheren Dimensionen als 2 keine Lösung besitzt. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir das *Banach-Tarski-Paradoxon* beweisen, welches mit Hausdorffs Arbeiten verwandt ist: Es ist möglich, eine Kugel in sechs Teilmengen aufzuteilen und diese Mengen so zu drehen und zu verschieben, dass man am Ende zwei Kugeln erhält, von denen jede genau so groß wie die ursprüngliche Kugel ist. Eine paradoxe Vorstellung, denn das Volumen hätte sich aus dem Nichts verdoppelt. Die Erklärung dafür ist, dass die Teile, in die die Kugel zerlegt wird, keinen sinnvollen Inhalt haben können. Sie haben eine Struktur, die sich kein Mensch bildlich vorstellen kann, und können nur mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre definiert werden.

Das Banach-Tarski-Paradoxon baut hauptsächlich auf der Komplexität der Bewegungen im dreidimensionalen Raum auf. In kleineren Dimensionen sind diese Bewegungen weniger kompliziert und die Ergebnisse von Hausdorff, Banach und Tarski lassen sich nicht auf diesen Fall übertragen. Im Gegenteil bewies Banach 1923 sogar, dass es in einer und zwei Dimensionen nicht nur eine Funktion gibt, die den Forderungen des Inhaltsproblems genügt, sondern unendlich viele. Diese Lösungen haben gegenüber dem Lebesguemaß neben der Nicht-Eindeutigkeit auch den Nachteil, dass wir sie nicht konstruktiv herleiten, sondern nur ihre Existenz beweisen können. Im dritten Teil der Arbeit werden wir diesen *Satz von Banach* beweisen und zuvor einige interessante Ergebnisse aus der Mengenlehre und der Funktionalanalysis herleiten, die für den Beweis notwendig sind.

2 Das Maßproblem

2.1 Isometrien

Seien (V, d_V) und (W, d_W) metrische Räume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isometrie*, falls $d_W(f(x), f(y)) = d_V(x, y)$ $(x, y \in V)$. Im Spezialfall $V = W = \mathbb{R}^d$ mit der euklidischen Metrik werden Isometrien auch als *Bewegungen* bezeichnet. Sind zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ *kongruent* $(A \cong B)$, d.h. gibt es eine Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sodass $\varphi(A) = B$, so werden wir fordern, dass diese Mengen das gleiche Volumen haben. Deshalb werden wir oft vor der Aufgabe stehen, Invarianz unter Bewegungen nachzuweisen oder zu widerlegen. Um diese Aufgabe bewältigen zu können, wollen wir uns zunächst anhand von [Soe12] und [Ban32] mit Isometrien beschäftigen.

Die Metrik im Spezialfall $\mathbb{R}^d$ ist vom Skalarprodukt $(x|y) = x^T y$ erzeugt, weshalb wir zunächst Isometrien auf mit Skalarprodukt versehenen Vektorräumen, sogenannten *Prähilberträumen*, untersuchen werden. Eine lineare Abbildung eines reellen Prähilbertraumes in sich selbst heißt *orthogonal*, wenn sie das Skalarprodukt erhält, d.h. $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ für alle Vektoren x und y. Im reellen Fall lassen sich die Isometrien bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik leicht mittels orthogonaler Abbildungen charakterisieren.

Satz 2.1. *Seien V und W reelle Prähilberträume und $f : V \to W$ eine Isometrie mit $f(0) = 0$, dann ist f eine lineare Abbildung, die das Skalarprodukt erhält. Insbesondere ist f orthogonal, falls $V = W$ gilt.*

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass die folgende Version der Polarisationsformel richtig ist:

$$(v|w) = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2\right) \quad (v, w \in V \text{ oder } v, w \in W)$$

Da f eine Isometrie mit $f(0) = 0$ ist, folgt sofort, dass $\|f(x)\| = \|x\|$ $(x \in V)$. Mithilfe dieser beiden Beobachtungen gilt weiterhin

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) = (x|y) \quad (x, y \in V)\end{aligned}$$

also erhält f das Skalarprodukt. Für jedes $x \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ folgern wir damit

$$\begin{aligned}\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 &= (f(\lambda x) - \lambda f(x) \,|\, f(\lambda x) - \lambda f(x)) \\ &= (f(\lambda x) \,|\, f(\lambda x)) + (\lambda f(x) \,|\, \lambda f(x)) - 2\,(f(\lambda x) \,|\, \lambda f(x)) \\ &= (\lambda x|\lambda x) + \lambda^2\,(x|x) - 2\lambda\,(\lambda x|x) = 0\end{aligned}$$

was äquivalent zur *Homogenität* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ist. Analog zeigt man die *Additivität*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in V)$$

womit auch die Linearität von f bewiesen ist. □

Damit können wir folgern, dass jede Isometrie f zwischen reellen Prähilberträumen eine affin lineare Abbildung ist. Gilt nämlich $f(0) = z$, so setzen wir $g := f - z$. Die Translation um $-z$ ist eine Isometrie, weshalb g den Voraussetzungen von Satz 2.1 genügt. Es gilt nun $f = g + z$, also ist f affin linear und der lineare Anteil g erhält das Skalarprodukt. Im Spezialfall $V = W = \mathbb{R}^d$ lässt sich f nun durch $f(x) = Ax + z$ beschreiben, wobei A eine orthogonale $d \times d$-Matrix ist. Die Beschaffenheit solcher Abbildungen wird in der linearen Algebra studiert. Mit diesen Kenntnissen können wir die Gestalt der Matrizen konkret angeben und auch die Menge aller Isometrien im $\mathbb{R}^d$ leicht charakterisieren: Es handelt sich lediglich um Kombinationen aus Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen.

In beliebigen normierten Räumen können wir eine ähnliche Aussage treffen. Dazu leiten wir zunächst eine hinreichende Bedingung für die Linearität einer Abbildung zwischen reellen Räumen her.

Lemma 2.2. *Seien V und W reelle, normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine stetige, additive Abbildung, dann ist f linear.*

Beweis. Aus der Additivität folgt induktiv sofort, dass f homogen bezüglich $\mathbb{N}$ ist, d.h. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $(x \in V,\ \alpha \in \mathbb{N})$. Es ist $f(0) = 0$, denn $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Damit gilt $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, also $f(-x) = -f(x)$ womit die Homogenität bezüglich $\mathbb{Z}$ folgt. Sei nun $\alpha = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl, dann gilt $q \cdot f(\alpha x) = f(px) = p \cdot f(x)$, was äquivalent zur Homogenität bezüglich $\mathbb{Q}$ ist.

Sei nun α eine beliebige reelle Zahl, dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, die gegen α konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(\alpha x) = f\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n x\right) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n f(x) = \alpha f(x)$$

und damit die Behauptung. □

Aus der Definition und mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums folgt sofort, dass jede Isometrie injektiv und stetig ist. Um eine zu Satz 2.1 analoge Aussage herleiten zu können, müssen wir zusätzlich fordern, dass die betrachtete Isometrie surjektiv ist.

Satz 2.3. *Seien V und W normierte Räume und $f : V \to W$ eine surjektive Isometrie, die $f(0) = 0$ erfüllt, dann ist f additiv.*

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in V$ und seien

$$H_1 := \left\{ x \in V : \|x - x_1\| = \|x - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \right\}$$
$$H_n := \left\{ x \in H_{n-1} : \|x - z\| \leq \frac{1}{2}\,\delta\left(H_{n-1}\right)\ \left(z \in H_{n-1}\right) \right\} \quad (n \geq 2)$$

wobei $\delta(H_n) := \sup_{x,y \in H_n} \|x - y\|$. Für alle $x', x'' \in H_1$ gilt

$$\|x' - x''\| \leq \|x' - x_1\| + \|x_1 - x''\| = \|x_1 - x_2\| < \infty$$

und zusammen mit $\delta(H_n) \leq \frac{1}{2}\,\delta(H_{n-1})$ folgt $\lim_{n\to\infty} \delta(H_n) = 0$. Das heißt, dass $H := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ aus höchstens einem Punkt besteht.

Wir zeigen nun, dass für jeden Punkt $x \in H_n$ auch der Punkt $\bar{x} := x_1 + x_2 - x$ in H_n liegt. Für $n = 1$ gilt $\|\bar{x} - x_1\| = \|x - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ und $\|\bar{x} - x_2\| = \|x - x_1\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$, da $x \in H_1$. Per Definition gilt also $\bar{x} \in H_1$. Für $n \geq 2$ folgt die Behauptung induktiv, denn für $x \in H_n \subset H_{n-1}$ und $x' \in H_{n-1}$ gilt $\|\bar{x} - x'\| = \|x_1 + x_2 - x' - x\| \leq \frac{1}{2}\,\delta(H_{n-1})$, da nach Induktionshypothese auch $x_1 + x_2 - x'$ in H_{n-1} liegt. Damit folgt $\bar{x} \in H_n$.

Damit können wir nun zeigen, dass $H \neq \emptyset$, denn der Punkt $\xi := \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ in H_n enthalten. Es ist $\xi \in H_1$, da $\|x_1 - \xi\| = \left\|\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ und analog für $\|x_2 - \xi\|$. Angenommen $\xi \in H_{n-1}$. Für jedes $x \in H_{n-1}$ wissen wir, dass $\bar{x}$ auch in H_{n-1} liegt und somit gilt

$$2\|\xi - x\| = \|2\xi - 2x\| = \|x_1 + x_2 - 2x\| = \|\bar{x} - x\| \leq \delta(H_{n-1})$$

was äquivalent zu $\xi \in H_n$ ist. Wir nennen ξ das *Zentrum* von x_1 und x_2.

Da W ein normierter Raum ist, haben auch die Punkte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ das eindeutige Zentrum $\frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$. Für diese beiden Punkte seien nun die Mengen H'_n analog zu den Mengen H_n definiert, dann gilt $f(H_n) = H'_n$. Für $n = 1$ folgt

$$\|f(x) - f(x_1)\| = \|x - x_1\| = \frac{1}{2}\,\|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2}\,\|f(x_1) - f(x_2)\|$$

und analog für $\|f(x) - f(x_2)\|$. Ebenso beweist man, dass für jeden Punkt $x \in H'_1$ der existierende Punkt $f^{-1}(x)$ in H_1 liegt. Das heißt insbesondere, dass $\delta(H_1) = \delta(H'_1)$.

Für $n \geq 2$ gelten diese Eigenschaften induktiv, denn sei $x \in H_n$, so liegt x auch in H_{n-1} und für jeden Punkt $z \in H_{n-1}$ gilt $\|x - z\| \leq \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$. Nach Induktionshypothese liegt der Punkt $f(x)$ in H'_{n-1} und für jeden Punkt $z' \in H'_{n-1}$ gibt es einen Punkt $z \in H_{n-1}$ mit $f(z) = z'$. Somit folgt wiederum mit Hilfe der Induktionshypothese

$$\left\|f(x) - z'\right\| = \|x - z\| \leq \frac{1}{2}\,\delta(H_{n-1}) = \frac{1}{2}\,\delta\left(H'_{n-1}\right).$$

Analog beweist man wieder die Umkehrung und es folgt wieder, dass $\delta(H_n) = \delta(H'_n)$. Somit ist $f(\xi) \in H_n$ für jede natürliche Zahl n, was bedeutet, dass $f(\xi)$ das Zentrum von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ ist. Mit der obigen Darstellung des Zentrums folgt

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

für zwei beliebige Punkte $x_1, x_2 \in V$. Setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = 0$, so folgt $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}f(x)$ $(x \in V)$, da $f(0) = 0$. Für beliebige $x_1, x_2 \in V$ gilt also

$$f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{1}{2}(2x_1 + 2x_2)\right) = \frac{1}{2}f(2x_1) + \frac{1}{2}f(2x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

was zu zeigen war. □

Handelt es sich bei V und W um reelle Vektorräume, so folgt mit Lemma 2.2 sogar die Linearität von f. Analog zur Aussage im reellen Prähilbertraum gilt nun, dass jede surjektive Isometrie zwischen reellen, normierten Räumen affin linear ist.

2.2 Das Maßproblem von Lebesgue

In seiner Dissertation stellte Henri Léon Lebesgue 1902 zum ersten Mal das *Maßproblem*: Gibt es eine Funktion $\mu : \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \to [0, \infty]$, die den folgenden Eigenschaften genügt?

(i) für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^d\big)$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right) \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

(ii) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cong B$ gilt $\mu(A) = \mu(B)$ (Bewegungsinvarianz)

(iii) $\mu([0,1]^d) = 1$ (Normiertheit)

Lebesgue konnte das Problem nicht lösen, sondern nur zeigen, dass es eine Lösung auf einer Teilmenge von $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gibt, deren Elemente er messbare Mengen nannte. Der heute übliche Vorgang ist es, den Definitionsbereich direkt einzuschränken: Eine *σ-Algebra* auf einer beliebigen, nichtleeren Menge Ω ist eine Teilmenge Σ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, die den folgenden Eigenschaften genügt:

$$(i)\ \emptyset \in \Sigma$$

$$(ii)\ A \in \Sigma \Rightarrow A^C \in \Sigma$$

$$(iii)\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$$

Eine Funktion $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ heißt *Maß*, wenn sie σ-additiv ist und $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt. In Abschnitt 2.4 werden wir zeigen, dass die nach Lebesgue messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, die heute als Lebesgue-Borelsche σ-Algebra bezeichnet wird, und die zugehörige Mengenfunktion ein Maß ist, das wir heute als Lebesguemaß bezeichnen. Dass Lebesgue keine allgemeine Lösung fand, lag daran, dass das von ihm gestellte Problem keine Lösung besitzt, wie Giuseppe Vitali bereits 1905 beweisen konnte (Für einen Beweis dieser Tatsache siehe z.B. [Bea04, S.142f]).

1914 fand Constantin Carathéodory eine Möglichkeit, die Konstruktion des Lebesguemaßes von 1902 zu vereinfachen. In den nächsten Abschnitten werden wir das Lebesguemaß auf diese Art und Weise konstruieren und seine Eigenschaften beschreiben. Dabei orientieren wir uns an [Bea04].

2.3 Äußere Maße

Zur Konstruktion eines Volumens auf $\mathbb{R}$ scheint folgender Ansatz natürlich: Hat man ein Intervall der Form $I = (a, b)$, $(a, b]$, $[a, b)$ oder $[a, b]$ $(a \leq b \in \mathbb{R})$ so ist $|I| := b - a$ die Länge des Intervalls. Auch für ein leeres Intervall oder ein unendliches Intervall macht das Sinn. Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, so lässt sich A durch eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen überdecken. Das Volumen von A sollte die Gesamtlänge der überdeckenden

Intervalle nicht überschreiten.

Wir definieren deshalb

$$l^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ I_n = (a_n, b_n)\ \left(a_n \le b_n \in \overline{\mathbb{R}}\right) \right\}.$$

Leider funktioniert diese intuitive Definition des Volumens nicht für alle denkbaren Mengen. Auf der ganzen Potenzmenge von $\mathbb{R}$ führt die Definition von l^* lediglich zu einem äußeren Maß.

Ein *äußeres Maß* auf einer beliebigen, nichtleeren Menge Ω ist eine Funktion $m^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit

(i) $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) für alle $A \subset B \subset \Omega$ gilt $m^*(A) \le m^*(B)$ (Monotonie)

(iii) für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

Es ist klar, dass l^* immer einen Wert zwischen 0 und ∞ annimmt. Die leere Menge lässt sich von leeren Intervallen überdecken, also gilt $l^*(\emptyset) = 0$. Ist $A \subset B \subset \mathbb{R}$ und $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen, die B überdecken, so wird auch A von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt. Somit gilt $l^*(A) \le l^*(B)$, d.h. l^* ist monoton. Um die σ-Subadditivität zu zeigen sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen der reellen Achse und $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(I_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von Intervallen, die A_n überdecken und für die $\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_{n,k}| \le l^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ gilt. Dann ist $(I_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $\sum_{n,k\in\mathbb{N}} |I_{n,k}| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} l^*(A_n) + \varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt $l^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} l^*(A_n)$ und damit ist l^* tatsächlich ein Beispiel für ein äußeres Maß auf $\Omega = \mathbb{R}$.

2.4 Der Satz von Carathéodory

Lebesgue nutzte in seiner Konstruktion ein äußeres und zusätzlich noch ein inneres Maß und nannte Mengen messbar, deren inneres und äußeres Maß übereinstimmen. Carathéodory konnte zeigen, dass man dabei auf das innere Maß verzichten kann.

Ist m^* ein äußeres Maß, so nennen wir eine Menge $A \subset \Omega$ *messbar*, wenn

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right)$$

für alle $E \subset \Omega$ gilt. Wegen Eigenschaft (iii) des äußeren Maßes, ist das äquivalent zu $m^*(E) \ge m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right)$. Mit $\mathcal{M}$ bezeichnen wir die Menge der messbaren

Mengen.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von $\mathcal{M}$ herleiten. Direkt aus der Definiton folgt $\emptyset \in \mathcal{M}$ und $A^C \in \mathcal{M}$ $(A \in \mathcal{M})$, denn $E \cap \emptyset = \emptyset$, $E \cap \emptyset^C = E$ und $\left(A^C\right)^C = A$.

Lemma 2.4. *Sind A und B messbar, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$.*

Beweis. Sei $E \subset \Omega$, dann folgt aus der Messbarkeit von A

$$\begin{aligned} m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) &= m^*\left((E \cap (A \cup B)) \cap A\right) + m^*\left((E \cap (A \cup B)) \cap A^C\right) \\ &= m^*\left(E \cap A\right) + m^*\left(E \cap B \cap A^C\right). \end{aligned}$$

Daraus und aus der Messbarkeit von A und B folgt

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C\right) \\ &= m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap A^C \cap B\right) + m^*\left(E \cap A^C \cap B^C\right) \\ &= m^*(E \cap A) + m^*\left(E \cap B \cap A^C\right) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right) \\ &= m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*\left(E \cap (A \cup B)^C\right). \end{aligned}$$

Also ist $A \cup B$ messbar und auch $A \cap B = \left(A^C \cup B^C\right)^C$. □

Wendet man Lemma 2.4 induktiv an, so folgt für beliebige messbare Mengen $A_1, \dots, A_n$, dass auch $A := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}$. Außerdem gilt $m^*(E \cap A) = \sum_{k=1}^n m^*(E \cap A_k)$, falls die Mengen paarweise disjunkt sind. Für $n = 1$ ist das offenbar richtig. Sei nun $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$, dann gilt aufgrund der Messbarkeit von A_{n+1} und per Induktion

$$\begin{aligned} m^*(E \cap B_{n+1}) &= m^*(E \cap B_{n+1} \cap A_{n+1}) + m^*\left(E \cap B_{n+1} \cap A_{n+1}^C\right) \\ &= m^*(E \cap A_{n+1}) + m^*(E \cap B_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(E \cap A_k). \end{aligned}$$

Damit können wir nun die wichtigste Eigenschaft der messbaren Mengen herleiten.

Satz 2.5 (Carathéodory)**.** *$\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra und $\mu := m^*_{|\mathcal{M}}$ ist ein Maß.*

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass die leere Menge und Komplemente messbarer Mengen messbar sind. Weiterhin folgt sofort aus den Eigenschaften des äußeren Maßes, dass μ immer einen Wert im Intervall $[0, \infty]$ annimmt und die leere Menge dabei den Wert 0 erhält.

Seien nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkte, messbare Mengen. Wir definieren B_n wie oben und $B := \lim_{n \to \infty} B_n$. Wie wir oben gesehen haben, ist B_n messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für $E \subset \Omega$ gilt somit

$$m^*(E) = m^*(E \cap B_n) + m^*\left(E \cap B_n^C\right) = \sum_{k=1}^n m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap B_n^C\right).$$

Aus $B_n \subset B$ folgt $B^C \subset B_n^C$ und damit gilt nun für $n \to \infty$ und mit Hilfe der Monotonie sowie der σ-Subadditivität des äußeren Maßes

$$m^*(E) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap B^C\right) \geq m^*(E \cap B) + m^*\left(E \cap B^C\right).$$

Also ist B messbar. Sind die Mengen A_k nicht paarweise disjunkt, so definieren wir $A_1' := A_1$ und $A_k' := A_k \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$. Die Mengen A_k' sind paarweise disjunkt, messbar und ihre Vereinigung ist ebenfalls B. Damit folgt, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Seien die Mengen nun wieder paarweise disjunkt, dann folgt aus der Messbarkeit von B und der σ-Subadditivität

$$m^*(E) = m^*(E \cap B) + m^*\left(E \cap B^C\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap B^C\right).$$

Wie wir oben gesehen haben, gilt aber auch $\geq$ und damit die Gleichheit. Setzen wir nun $E = B$, so folgt $m^*(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k)$ und damit ist μ ein Maß. $\square$

2.5 Das Lebesguemaß

Mithilfe des Satzes von Carathéodory können wir nun das Lebesguemaß konstruieren. Dafür betrachten wir das äußere Maß l^* aus Abschnitt 2.3 und die bezüglich l^* messbaren Mengen. Das nach dem Satz von Carathéodory existierende Maß nennen wir λ. Es gilt

Lemma 2.6. *Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist messbar und es ist $\lambda(I) = |I|$.*

Beweis. Sei $E \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von E durch offene Intervalle. Es ist $I \cap I_k$ ein Intervall und $I^C \cap I_k$ ein Intervall oder zwei Intervalle. Damit gibt es offene Intervalle I_k', I_k'' und I_k''', sodass $I \cap I_k \subset I_k'$ und $I^C \cap I_k \subset I_k'' \cup I_k'''$ und $|I_k'| + |I_k''| + |I_k'''| \leq |I_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Dann gilt

$$I \cap E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k', \; I^C \cap E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(I_k'' \cup I_k'''\right)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k| + \varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(|I_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) &\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k'| + |I_k''| + |I_k'''| \\ &\geq l^*(I \cap E) + l^*\left(I^C \cap E\right).\end{aligned}$$

Da ε und $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig waren, folgt Messbarkeit von I.

Um das Maß von I zu bestimmen, sei zunächst $I = [a, b]$ $(a \leq b)$ abgeschlossen. Für $\varepsilon > 0$ ist $I \subset \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, also gilt $l^*(I) \leq |I| + \varepsilon$ und damit $l^*(I) \leq |I|$. Sei nun $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von I durch offene Intervalle. Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es eine endliche Teilüberdeckung und wir können annehmen, dass diese von den Intervallen $I_1, \ldots, I_n$ gebildet wird. Die Nummerierung sei außerdem so gewählt, dass $a_1 := a$ in I_1 liegt, der Anfangspunkt von I_2 in I_1 liegt (falls $n > 1$) und somit ein $a_2 \in I_1 \cap I_2$ existiert, ein Punkt $a_3 \in I_2 \cap I_3$ usw. Wir erhalten endlich viele Punkte $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$ mit der Eigenschaft, dass $(a_j, a_{j+1}) \subset I_j$. Damit gilt

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{j+1} - a_j \leq \sum_{j=1}^{n} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Da die Intervalle $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig waren, folgt $l^*(I) \geq |I|$. Somit gilt also $\lambda(I) = l^*(I) = |I|$. Sei nun I' ein beliebiges Intervall mit Randpunkten $a \leq b \in \mathbb{R}$, dann ist $I' \subset I$ und somit folgt $l^*(I') \leq |I| = |I'|$ aufgrund der Monotonie des äußeren Maßes. Umgekehrt gibt es für jedes $|I'| > \varepsilon > 0$ ein abgeschlossenes Intervall I_ε mit $I_\varepsilon \subset I'$ und $|I_\varepsilon| = |I'| - \varepsilon$, also gilt wegen der Monotonie auch $l^*(I') \geq |I'| - \varepsilon$. Ist nun I ein offenes (bzw. halboffenes) Intervall mit Endpunkten $b = \infty$ und $a \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ $(n \geq n_0)$. Dann ist $I_n := (a, n) \subset I$ und somit gilt wegen der Monotonie $\lambda(I) \geq \lambda(I_n) \longrightarrow \infty$. Analog beweist man das, falls $a = -\infty$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $\square$

Die kleinste σ-Algebra, die alle Intervalle enthält, bezeichnen wir als *Borelmengen* $\mathcal{B}$. Aus Lemma 2.6 und Satz 2.5 folgt nun also, dass jede Borelmenge messbar ist. Ein Maßraum heißt *vollständig*, wenn jede Nullmenge, also jede Teilmenge einer Menge mit Maß 0, messbar ist. Aufgrund der Monotonie des äußeren Maßes hat jede Nullmenge das äußere Maß 0 und jede Menge N vom äußeren Maß 0 ist messbar, denn es gilt $m^*(E \cap N) + m^*\left(E \cap N^C\right) = 0 + m^*\left(E \cap N^C\right) \leq m^*(E)$ für jedes $E \subset \mathbb{R}$. Damit ist das Lebesguemaß also auch auf der Vervollständigung $\overline{\mathcal{B}}$ der Borelmengen, d.h. der kleinsten vollständigen σ-Algebra, die alle Borelmengen enthält, definiert. Diese Mengen bezeichnet man als Lebesgue-Borel-Mengen.

Das Lebesguemaß existiert auch in höheren Dimensionen, denn es gilt der *Satz vom Produktmaß* (vgl. z.B. [Els10, S.167]): Sind für die Dimensionen $1, \ldots, d$ die Lebesguemaße bereits gefunden, so gibt es ein Maß $\lambda^{d+1} := \lambda^d \otimes \lambda$, welches für jede Menge der Form $A \times B$ mit $A \in \overline{\mathcal{B}}^d$ und $B \in \overline{\mathcal{B}}$ die Eigenschaft $\lambda^{d+1}(A \times B) = \lambda^d(A) \cdot \lambda(B)$ hat.

Der *Maßeindeutigkeitssatz* (vgl. [Els10, S.60]) liefert uns außerdem die Eindeutigkeit dieses Maßes. Das Lebesguemaß ist zusätzlich bewegungsinvariant. Ein Beweis dieser Tatsache findet sich z.B. bei [Els10, S.91 f]. Damit haben wir eine eindeutige Funktion λ^d gefunden, die auf einer großen Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}^d$ definiert ist und die übrigen drei Forderungen des Maßproblems erfüllt.

3 Das Banach-Tarski-Paradoxon

Verzichtet man bei einem Maß auf die σ-Additivität und fordert stattdessen nur endliche Additivität, erhält man den Begriff des *Inhalts*. Analog zum Maßproblem stellen wir nun also das *Inhaltsproblem*: Gibt es eine Funktion $m : \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \to [0,\infty]$ $(d \in \mathbb{N})$, die den folgenden drei Eigenschaften genügt?

(i) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:
$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (endliche Additivität)

(ii) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cong B$ gilt:
$m(A) = m(B)$ (Bewegungsinvarianz)

(iii) $m([0,1]^d) = 1$ (Normiertheit)

1924 bewiesen Stefan Banach und Alfred Tarski den folgenden Satz, aus dem sofort folgt, dass es keine Funktion gibt, die den Anforderungen des Inhaltsproblems in $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 3$ genügt.

Satz (Banach und Tarski)**.** *Sei $d \geq 3$ und $A, D \subset \mathbb{R}^d$ seien beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ und paarweise disjunkte Mengen $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^d$, sodass $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ und $A_i \cong D_i$ $(i = 1, \dots, n)$.*

Ist nun $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel und $D := B \cup C$ mit den Kugeln $B := A + b$ mit Mittelpunkt $b := (0,0,3)^T$ und $C := A + c$ mit Mittelpunkt $c := (0,0,-3)^T$, so ergibt sich ein Spezialfall, der oft als Paradoxon von Banach und Tarski bezeichnet wird. Das Wort „Paradoxon“ soll hierbei nicht andeuten, dass der Satz widersprüchlich ist. Er widerspricht lediglich unserer Intuition und ist auch in unserer physikalischen Welt unmöglich, denn er besagt, dass man eine Kugel in sechs Teilmengen aufteilen und diese Teilmengen so drehen und verschieben kann, dass man schließlich zwei Kugeln erhält, die beide so groß wie die ursprüngliche Kugel sind. Das Volumen hätte sich verdoppelt, was nur den Schluss zulässt, dass die betrachteten Mengen nicht messbar sein können und auch keinen sinnvollen Inhalt haben.

Satz 3.1 (Banach-Tarski-Paradoxon)**.** *Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A'_1, \dots, A'_6, B'_1, B'_2, B'_3, C'_1, C'_2, C'_3$, sodass*

$$A = \bigcup_{i=1}^{6} A'_i, \ B = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3, \ C = C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3$$

$$A'_i \cong B'_i, \ A'_{i+3} \cong C'_i \ (i = 1, 2, 3).$$

In den nächsten Abschnitten werden wir diesen Spezialfall beweisen und uns dabei an [Bea04] orientieren.

3.1 Freie Gruppen

Für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons müssen wir uns näher mit den Bewegungen im $\mathbb{R}^3$ beschäftigen. Wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, ist die Menge aller Drehungen im $\mathbb{R}^3$ eine Teilmenge dieser Bewegungen. Diese Drehungen tragen eine Gruppenstruktur, weshalb wir zunächst einen Blick auf allgemeine Gruppen werfen.

Sei $(H, \cdot)$ eine Gruppe und $\sigma, \tau \in H$. Die von σ und τ erzeugte Untergruppe $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ besteht aus dem Einselement von H sowie allen Ausdrücken der Form

$$\mu = \sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\ldots\sigma^{j_n}\tau^{k_n} \ (n \in \mathbb{N}, j_i, k_i \in \mathbb{Z}) \tag{3.1}$$

wobei der Eindeutigkeit wegen gelte: $j_i \neq 0$, falls $i \neq 1$, $k_i \neq 0$, falls $i \neq n$, und $k_1 \neq 0$ oder $j_1 \neq 0$, falls $n = 1$.

Wir nennen die Gruppe G *frei* oder *frei erzeugt*, falls für alle $\mu \in G\backslash\{1_H\}$ die Koeffizienten j_i und k_i eindeutig bestimmt sind. Das ist äquivalent dazu, dass $1 := 1_H$ keine Darstellung der Form (3.1) hat, denn gibt es zwei verschiedene Darstellungen μ_1 und μ_2 von $\mu \in H$, so ist $1 = \mu_1\mu_2^{-1}$ nach eventuellem Kürzen der Exponenten eine Darstellung des Einselements der Form (3.1). Gibt es andererseits eine solche Darstellung von 1, so sind $\mu = 1\mu$ nach eventuellem Kürzen der Exponenten zwei verschiedene Darstellungen des Elements $\mu \in G\backslash\{1\}$.

Ein erstes Lemma, das für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons nötig ist, liefert disjunkte, echte Teilmengen einer freien Gruppe G, aus denen sich die Gruppe durch Multiplikation mit lediglich einzelnen weiteren Elementen zweimal erzeugen lässt.

Lemma 3.2. *Sei G eine von σ und τ frei erzeugte Untergruppe von $(H, \cdot)$. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $H_1, H_2, H_3, H_4 \subset G$, deren Vereinigung eine echte Teilmenge von $G\backslash\{1\}$ ist, sodass gilt:*

$$\begin{aligned} &G = \sigma H_1 \cup \tau H_2 && \textit{und} && \sigma H_1 \cap \tau H_2 = \emptyset \\ &G = \sigma^{-1}H_3 \cup \tau^{-1}H_4 && \textit{und} && \sigma^{-1}H_3 \cap \tau^{-1}H_4 = \emptyset \end{aligned}$$

Beweis. Sei $W\left(\sigma^{-1}\right)$ die Menge der Elemente von G, deren Darstellung in (3.1) mit σ^{-1} beginnt, d.h. $j_1 < 1$; in $W\left(\tau\sigma^{-1}\right)$ seien die Elemente, die mit $\tau\sigma^{-1}$ beginnen, d.h. $j_1 = 0$, $k_1 = 1$, $j_2 < 0$ usw. Mit diesen Bezeichnungen lässt sich G als disjunkte Vereinigung der fünf Mengen $\{1\}$, $W(\sigma)$, $W\left(\sigma^{-1}\right)$, $W(\tau)$ und $W\left(\tau^{-1}\right)$ schreiben. Seien nun

$$\begin{aligned} &H_1 := W\left(\sigma^{-1}\right), && H_2 := W\left(\tau^{-1}\sigma\right) \\ &H_3 := W(\sigma), && H_4 := W\left(\tau\sigma^{-1}\right) \end{aligned}$$

Diese vier Mengen sind offensichtlich paarweise disjunkt und ihre Vereinigung enthält z.B. weder 1 noch τ^n $(n \in \mathbb{Z})$. Betrachtet man nun $h \in \{1\} \cup W\left(\sigma^{-1}\right) \cup W(\tau) \cup W\left(\tau^{-1}\right)$, so gilt $\sigma^{-1}h \in H_1$. Umgekehrt gilt $\sigma h \in \{1\} \cup W\left(\sigma^{-1}\right) \cup W(\tau) \cup W\left(\tau^{-1}\right)$, falls $h \in H_1$.

Somit folgt $\sigma H_1 = \{1\} \cup W\left(\sigma^{-1}\right) \cup W(\tau) \cup W\left(\tau^{-1}\right)$. Es ist klar, dass $\tau H_2 = W(\sigma)$. Analog sieht man, dass $G = \sigma^{-1}H_3 \cup \tau^{-1}H_4$. □

3.2 Die Gruppe SO(3)

Die Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1 können wir nun auf die Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^3$ übertragen. Diese Gruppe entspricht der Menge $SO(3)$ der orthogonalen 3×3-Matrizen mit Determinante 1. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass $SO(3)$ eine freie Untergruppe G enthält, auf die man Lemma 3.2 anwenden kann.

Zunächst einige Vorüberlegungen, bevor wir das Hauptresultat über die Gruppe $SO(3)$ beweisen: Durch Basiswechsel kann man Matrizen aus $SO(2)$ stets auf die Form

$$\mu_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

bringen. Mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos\theta_1 + \theta_2$ und $\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = \sin\theta_1 + \theta_2$ folgt sofort, dass $\mu_{\theta_1}\mu_{\theta_2} = \mu_{\theta_1+\theta_2}$ und insbesondere $\mu_\theta^n = \mu_{n\theta}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Diese Ergebnisse übertragen sich so auch auf Matrizen aus $SO(3)$ mit gleicher Drehachse.

Die eulersche Identität liefert $\cos n\theta = \Re e^{in\theta}$ und $\sin n\theta = \Im e^{in\theta}$. Seien $\alpha := \cos\theta$ und $\beta := \sin\theta$, dann folgt aus dem binomische Lehrsatz

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \sum_{k=0}^{n} \Re \binom{n}{k} \alpha^{n-k}\, i^k\, \beta^k = \sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}\, i^k\, \beta^k \\ &= \sum_k \binom{n}{2k} \alpha^{n-2k}\, (-1)^k\, \beta^{2k} \end{aligned}$$

und analog $\sin n\theta = \sum_k \binom{n}{2k+1} \alpha^{n-(2k+1)} (-1)^k \beta^{2k+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Seien nun $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gibt es einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ mit $cos\theta = \alpha$ und $sin\theta = \beta$ und damit gilt in der obigen Darstellung

$$\cos n\theta = 3^{-n} \sum_k \binom{n}{2k} (-8)^k \quad \text{und} \quad \sin n\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3^n} \sum_k \binom{n}{2k+1} (-8)^k \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Diese Summen wollen wir genauer untersuchen. Der Binomische Lehrsatz liefert uns

$$2^n + 0 = (1+1)^n + (1-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} + (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ gerade}} 2\binom{n}{k}$$

und somit gilt $\sum_k \binom{n}{2k} = \sum_k \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$. Zusätzlich gilt $-8 \equiv 1 \mod 3$, also auch $(-8)^k \equiv 1 \mod 3$. Setzen wir diese Überlegungen in die obigen Darstellungen für Kosinus und Sinus ein, erhalten wir $\cos n\theta = \frac{\alpha_n}{3^{|n|}}$ und $\sin n\theta = \beta_n \frac{2\sqrt{2}}{3^{|n|}}$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ wobei α_n und β_n ganze, nicht durch 3 teilbare Zahlen sind.

Mit diesen Überlegungen können wir nun zeigen:

Lemma 3.3. *Es gibt $\sigma, \tau \in SO(3)$, sodass $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ eine freie Untergruppe ist.*

Beweis. Seien $\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SO(3)$ mit α und β so wie oben gewählt. Es reicht zu zeigen, dass $\mu \in G$ in der Form (3.1) nicht das Einselement ist und dazu genügt es, einen Vektor zu finden, der von μ nicht auf sich selbst abgeworfen wird. Für $x := (0,0,1)^T$ zeigen wir zunächst die Darstellung

$$\mu x = 3^{-N} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ wobei } N := \sum_{m=1}^{n} |j_m| + |k_m|.$$

Weiter gilt $3 \mid c$, falls $j_1 \neq 0$ und $3 \mid a$, falls $j_1 = 0,\ k_1 \neq 0$.

Für $N = 1$ gilt entweder $j_1 = \pm 1$ oder $k_1 = \pm 1$ und alle anderen Koeffizienten sind jeweils 0. Im ersten Fall ist $\sigma^{\pm 1} x = \frac{1}{3}(0,0,3)^T$, im zweiten Fall gilt $\tau^{\pm 1} x = \frac{1}{3}\left(0, \mp 2\sqrt{2}, 1\right)^T$. Für $N > 1$ folgt die Behauptung per Induktion, wobei die Fälle $j_1 \neq 0$ und $j_1 = 0$ unterschieden werden.

Im ersten Fall ist

$$\mu x = \sigma^{\pm 1}(\sigma^{\mp 1}\mu)x = \sigma^{\pm 1} \frac{1}{3^{N-1}} \left(a, b\sqrt{2}, c\right)^T = \frac{1}{3^N} \left(a \mp 4b, (b \pm 2a)\sqrt{2}, 3c\right)^T$$

wobei $3 \mid 3c$. Der zweite Fall liefert

$$\mu x = \tau^{\pm 1}(\tau^{\mp 1}\mu)x = \tau^{\pm 1} \frac{1}{3^{N-1}} \left(a, b\sqrt{2}, c\right)^T = \frac{1}{3^N} \left(3a, (b \mp 2c)\sqrt{2}, c \pm 4b\right)^T$$

und $3 \mid 3a$.

Für $k_n \neq 0$ gilt nun $3 \nmid b$, insbesondere ist der mittlere Eintrag also nicht 0. Für $n = 1$ ist $\mu = \tau^{k_1} (k_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ und mit den Vorüberlegungen gilt $\tau^{k_1} x = \frac{1}{3^{|k_1|}} \left(0, \mp\beta_{k_1} 2\sqrt{2}, \alpha_{k_1}\right)^T$ wobei $3 \nmid \beta_{k_1}$. Sei nun $n > 1$, dann folgt die Behauptung wieder per Induktion, wobei die Fälle $j_1 = 0$ und $j_1 \neq 0$ unterschieden werden müssen. Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} \mu x &= \tau^{k_1}(\tau^{-k_1}\mu)x = \tau^{k_1} \frac{1}{3^{N-|k_1|}} \left(a, b\sqrt{2}, c\right)^T \\ &= \frac{1}{3^N} \left(3^{|k_1|} a, (\alpha_{k_1} b \mp 2c\beta_{k_1})\sqrt{2}, c\alpha_{k_1} \pm 4b\beta_{k_1}\right)^T \end{aligned}$$

wobei $3 \nmid b, \alpha_{k_1}$ und $3 \mid c$, da $j_2 \neq 0$. Somit ist $\alpha_{k_1} b \mp 2c\beta_{k_1}$ nicht durch 3 teilbar. Im zweiten Fall folgt analog $\mu x = \frac{1}{3^N}\left(a\alpha_{j_1} \mp 4b\beta_{j_1}, (b\alpha_{j_1} \pm 2a\beta_{j_1})\sqrt{2}, 3^{|j_1|}c\right)^T$, wobei $3 \nmid b, \alpha_{j_1}$ und $3 \mid a$, da $k_1 \neq 0$. Somit ist $b\alpha_{j_1} \pm 4a\beta_{j_1}$ nicht durch 3 teilbar.

Sei nun $k_n = 0$ und $n \neq 1$. Angenommen $\mu = 1$, dann folgt $\sigma^{j_n}\mu\sigma^{-j_n}x = x$, was einen Widerspruch liefert, denn $\sigma^{j_n}\mu\sigma^{-j_n}$ ist von der oben betrachteten Form. Falls $n = 1$, so ist $\mu = \sigma^{j_1}$ und nach den Vorüberlegungen wird z.B. der Vektor $(1, 0, 0)^T$ nicht auf sich selbst abgeworfen. □

3.3 Die Bahnen der Gruppenwirkung

Im Folgenden sei G stets die von σ und τ frei erzeugte Untergruppe von $SO(3)$. Wegen der Orthogonalität aller Matrizen in G, $E_3 x = x$ und $\mu(\nu x) = (\mu\nu)x$ $(x \in A, \mu, \nu \in G)$ wirkt diese Untergruppe auf die Einheitskugel A durch Linksmultiplikation. Die *Bahnen der Gruppenwirkung* sind definiert als $Gx := \{gx : g \in G\}$ $(x \in A)$. Jede Bahn ungleich $\{0\}$ ist unendlich, denn ist Gx eine endliche Bahn mit $x \neq 0$, dann ist auch $\{\sigma^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ endlich und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^{kn}x = x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Analog gibt es auch ein m mit $\tau^{km}x = x$. Damit gilt $\sigma^{mn}x = \tau^{nm}x = x$. Da $\sigma^{mn} \neq 1$ und $\tau^{nm} \neq 1$ liegt x also auf der Drehachse von σ und τ. Die Definition von σ und τ liefert $x = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Zusätzlich ist n in (3.1) stets eine endliche Zahl und damit ist die Gruppe G abzählbar. Somit ist jede Bahn außer $\{0\}$ abzählbar unendlich.

Da zwei Bahnen einer Gruppenwirkung entweder disjunkt oder gleich sind, ist

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x \in Gy \quad (x, y \in A)$$

eine Äquivalenzrelation. Seien O_i $(i \in I)$ die Äquivalenzklassen ohne den Ursprung. Wegen der Abzählbarkeit jeder Bahn O_i und der Überabzählbarkeit von A ist I überabzählbar. Mit dem Auswahlaxiom ist es möglich, aus jeder Bahn O_i einen Repräsentanten x_i mit $Gx_i = O_i$ auszuwählen. Sei $X := \{x_i : i \in I\}$ eine Menge von Repräsentanten, dann gilt $GX = A\backslash\{0\}$. Die Menge X ist nicht messbar, denn sei $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt $\lambda(A) = \lambda(A\backslash\{0\}) = \lambda(GX) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(g_n X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(X)$. Da A positives, endliches Maß hat, gibt es keinen sinnvollen Wert für $\lambda(X)$. Wir können X aber auch benutzen, um Lemma 3.2 auf die Einheitskugel A zu übertragen.

Lemma 3.4. *Es gibt paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_4 \subset A$, deren Vereinigung eine echte Teilmenge von A ist, sodass*

$$A = \sigma A_1 \cup \tau A_2 \qquad \textit{und} \qquad \sigma A_1 \cap \tau A_2 = \emptyset$$
$$A = \{0\} \cup \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4 \qquad \textit{und} \qquad \sigma^{-1} A_3 \cap \tau^{-1} A_4 = \emptyset.$$

Beweis. Seien die Mengen H_j $(j = 1, \ldots, 4)$ wie in Lemma 3.2 gewählt und seien

$$\begin{aligned} A_1 &:= H_1 X \cup \{0\}, & A_3 &:= H_3 X \\ \tilde{A}_2 &:= H_2 X, & \tilde{A}_4 &:= H_4 X \\ A_2 &:= \tilde{A}_2 \backslash \{\tau^{-1}\sigma A_1 \cap \tilde{A}_2\} \\ A_4 &:= \tilde{A}_4 \backslash \{\tau\sigma^{-1} A_3 \cap \tilde{A}_4\} \end{aligned}$$

Aus der Wahl von A_2 folgt die Disjunktheit von σA_1 und τA_2. Es ist $\tau(\tau^{-1}\sigma A_1 \cap \tilde{A}_2)$ eine Teilmenge von σA_1 und somit folgt $\sigma A_1 \cup \tau A_2 = \{0\} \cup \sigma H_1 X \cup \tau H_2 X = \{0\} \cup GX = A$. Analog sieht man, dass $A = \{0\} \cup \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4$ und $\sigma^{-1} A_3 \cap \tau^{-1} A_4 = \emptyset$.

Da 1 in keiner Menge H_i liegt, ist kein x aus X in der Vereinigung der A_i enthalten. □

3.4 Der Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons

Die Überlegungen aus Abschnitt 3.3 nutzen nur Drehungen und noch keine Verschiebungen oder Spiegelungen. Mit zusätzlichen Verschiebungen können wir nun ein letztes Lemma zeigen.

Lemma 3.5. *Es gibt paarweise disjunkte Mengen B_1, B_2, C_1, C_2, C_3 derart, dass $B = B_1 \cup B_2$, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Weiterhin gibt es eine Funktion $f : D = B \cup C \to A$, die eingeschränkt auf jedes B_i oder C_j $(i = 1, 2$ $j = 1, 2, 3)$ eine Bewegung ist und für die die Mengen $f(B_1)$, $f(B_2)$, $f(C_1)$, $f(C_2)$ und $f(C_3)$ paarweise disjunkt sind.*

Beweis. Wir wählen die Mengen A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ wie in Lemma 3.4 und definieren $\hat{f} : \bigcup_i A_i \to B \cup C$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sigma x + b \ \ (x \in A_1) \\ x &\mapsto \tau x + b \ \ (x \in A_2) \end{aligned}$$

Bezeichnet man $B_1 := \hat{f}(A_1)$ und $B_2 := \hat{f}(A_2)$, so gilt nach Lemma 3.4 bereits $B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Analog definieren wir für C

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sigma^{-1} x + c \ \ (x \in A_3) \\ x &\mapsto \tau^{-1} x + c \ \ (x \in A_4) \end{aligned}$$

und bezeichnen die Bilder von A_3 und A_4 als C_1 und C_2. Nach Lemma 3.4 sind C_1 und C_2 disjunkt und ihre Vereinigung ist $C \backslash \{c\}$. Aus Lemma 3.4 folgt außerdem, dass es ein $x^* \in A \backslash \bigcup_i A_i$ gibt. Eine Translation um $c - x^*$ verschiebt $\{x^*\}$ auf $C_3 := \{c\}$

Sei nun f die Umkehrabbildung von $\hat{f}$ auf $D \backslash \{c\}$ und $f(c) := x^*$, dann erfüllt f alle geforderten Bedingungen. □

Dies zeigt, dass es sogar eine echte Teilmenge $A' = \bigcup_i A_i \cup \{x^*\}$ von A gibt, aus der sich die Kugeln B und C nur durch Bewegungen von Teilmengen von A' erzeugen lassen. Damit können wir nun das Banach-Tarski-Paradoxon beweisen.

Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons 3.1. Es sei $g : A \to B \cup C$ die Translation um b, dann gilt $g(A) = B$. Lemma 3.5 liefert eine injektive Abbildung $f : B \cup C \to A$. Gibt es für ein $x \in A$ ein $y \in D$ mit $f(y) = x$ so bezeichnen wir y als Vorgänger von x. Analog ist $x \in A$ der Vorgänger von $y \in D$, falls $g(x) = y$ (welcher genau dann existiert, wenn $y \in B$). Die Vorgängersuche für einen Punkt $x \in A \cup D$ ist die sukzessive Suche nach Vorgängern, startend in x. Diese Suche kann entweder in A oder D abbrechen oder sie endet nicht.

Dies erlaubt uns eine Zerlegung von A und D in jeweils drei disjunkte Teilmengen.

$$\begin{aligned}
A_f &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in D}\}\\
A_g &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in A}\}\\
A_\infty &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\}
\end{aligned}$$

Und analog

$$\begin{aligned}
D_f &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in D}\}\\
D_g &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in A}\}\\
D_\infty &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\}
\end{aligned}$$

Es ist nun $f : D_f \to A_f$ auch bijektiv, denn für alle $x \in A_f$ endet die Vorgängersuche in D und somit hat x einen Vorgänger $y \in D$. Da für y die Vorgängersuche ebenfalls in D enden muss folgt $y \in D_f$. Analog sieht man, dass $g : A_g \to D_g$ bijektiv ist und ebenso, dass $f(D_\infty) = A_\infty$ und $g(A_\infty) = D_\infty$.

Seien nun

$$\begin{aligned}
B_i' &:= B_i \cap (D_f \cup D_\infty) \quad (i = 1, 2)\\
B_3' &:= B \cap D_g
\end{aligned}$$

mit Mengen B_i wie in Lemma 3.5. Es sind D_f, D_g und D_∞ paarweise disjunkt und nach Lemma 3.5 gilt auch $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Somit sind B_1', B_2' und B_3' paarweise disjunkt. Aus Lemma 3.5 folgt außerdem

$$\begin{aligned}
B &= B_1 \cup B_2\\
&= (B_1 \cap (D_f \cup D_\infty)) \cup (B_1 \cap D_g) \cup (B_2 \cap (D_f \cup D_\infty)) \cup (B_2 \cap D_g)\\
&= B_1' \cup B_2' \cup (B \cap D_g) = B_1' \cup B_2' \cup B_3'.
\end{aligned}$$

Sei $x \in C$, dann hat x keinen Vorgänger. Somit endet die Vorgängersuche sofort in $C \subset D$ und $C \cap D_g = C \cap D_\infty = \emptyset$. Wir können also $C_i' := C_i$ $(i = 1, 2, 3)$ setzen, wobei die Mengen C_i wieder aus Lemma 3.5 stammen.

Mit diesen Wahlen setzen wir nun für A

$$\begin{aligned} A'_i &:= f(B'_i) \quad (i = 1, 2) \\ A'_3 &:= g^{-1}(B'_3) \\ A'_{j+3} &:= f(C'_j) \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} A &= A_f \cup A_\infty \cup A_g = f(D_f) \cup f(D_\infty) \cup g^{-1}(D_g) \\ &= f(B'_1 \cup B'_2 \cup C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3) \cup g^{-1}(B'_3) \\ &= f(B'_1) \cup f(B'_2) \cup f(C'_1) \cup f(C'_2) \cup f(C'_3) \cup A'_3 \\ &= A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup A'_4 \cup A'_5 \cup A'_6. \end{aligned}$$

Die paarweise Disjunktheit von A'_1, A'_2, A'_4, A'_5, A'_6 folgt aus den Eigenschaften von f. Sei $x \in A'_j \cap A'_3$ $(j \neq 3)$, dann gilt $x \in f(D_f \cup D_\infty)$. Damit existiert ein $y \in D_f \cup D_\infty$ mit $f(y) = x$ und da y der Vorgänger von x ist, endet die Vorgängersuche für x genau wie für y in D oder gar nicht. Gleichzeitig gilt auch $x \in g^{-1}(D_g)$ womit x der Vorgänger eines $y \in D_g$ ist. Damit folgt ein Widerspruch, denn die Vorgängersuche müsste für x somit in A enden. Also sind alle Mengen A'_i paarweise disjunkt. □

Aus dem Banach-Tarski-Paradoxon lässt sich genauso wie aus dem Satz von Banach und Tarski folgern, dass das Inhaltsproblem für $d \geq 3$ keine Lösung besitzt. Gäbe es nämlich eine Lösung, so hätte die Einheitskugel einen endlichen Inhalt ungleich 0. Mit der endlichen Additivität und der Bewegungsinvarianz folgt der Widerspruch $m(A) = m(B) + m(C) = m(A + b) + m(A + c) = 2\, m(A)$. Für höhere Dimensionen folgt die Unlösbarkeit nun ebenso, indem wir jede Menge M, die im Beweis auftaucht, durch $M \times [0, 1]^{d-3}$ ersetzen und die verwendeten Drehmatrizen mit Einheitsmatrizen vergrößern.

In seinem Buch „Grundzüge der Mengenlehre“ bewies Felix Hausdorff bereits 1914 mit den gleichen Methoden, dass es keinen rotationsinvarianten Inhalt auf der Kugeloberfläche geben kann, der der gesamten Oberfläche einen Wert ungleich 0 zuordnet. Damit lässt sich ebenfalls folgern, dass das Inhaltsproblem in höheren Dimensionen als 2 keine Lösung besitzt. Die Beweise von Banach, Tarski und Hausdorff können allerdings nicht auf die Fälle $d = 1, 2$ übertragen werden, denn $SO(1)$ und $SO(2)$ haben keine freien Untergruppen, die von zwei Elementen erzeugt sind. Im Gegenteil werden wir im letzten Teil dieser Arbeit sehen, dass es solche paradoxen Zerlegungen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht geben kann.

4 Der Satz von Banach

Neun Jahre nach Hausdorffs Arbeit bewies Banach, dass das Inhaltsproblem für kleinere Dimensionen tatsächlich eine Lösung besitzt.

Satz 4.1 (Banach)**.** *Das Inhaltsproblem in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ ist lösbar, aber es gibt keine eindeutige Lösung.*

In den folgenden Abschnitten werden wir Banachs Vorgehen darstellen, wie es sich bei [Zaa67] und [Ban23] findet. Banachs Idee war es, das Lebesgueintegral für bestimmte Funktionen fortzusetzen, denn das Integral ist eng mit dem Volumenbegriff verbunden. Dafür benötigen wir Werkzeuge aus der Mengenlehre und der Funktionalanalysis, die wir in den nächsten zwei Abschnitten beweisen werden.

4.1 Partielle Ordnungen

Sei V eine Menge und $\leq$ eine Relation. V heißt von $\leq$ partiell geordnet, wenn $\leq$ die folgenden drei Bedingungen für alle $a, b, c \in V$ erfüllt.

$$\begin{aligned} &(i)\ a \leq a && \text{(Reflexivität)} \\ &(ii)\ a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c && \text{(Transitivität)} \\ &(iii)\ a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b && \text{(Antisymmetrie)} \end{aligned}$$

Zunächst einige Bezeichnungen für partiell geordnete Mengen: Gilt für $a, b \in V$ entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$, so heißen a und b *vergleichbar*. Eine Teilmenge $C \subset V$ heißt *linear geordnet* oder *Kette*, wenn je zwei Elemente von C stets vergleichbar sind. Ein Element $s \in V$ heißt *obere Schranke* der Teilmenge $D \subset V$, wenn $d \leq s$ für alle $d \in D$ gilt. Eine obere Schranke a von D heißt *kleinste obere Schranke*, wenn $a \leq s$ für jede weitere obere Schranke s von D gilt. Ein Element $m \in V$ heißt *maximal*, wenn $m \leq a$ äquivalent zu $m = a$ ist $(a \in V)$.

Wir werden nun ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines maximalen Elements herleiten. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, welches eine Aussage über einen Fixpunkt einer Funktion macht und als Voraussetzung lediglich Eigenschaften bezüglich der partiellen Ordnung benötigt.

Lemma 4.2. *Sei V partiell geordnet und jede Kette von V habe eine kleinste obere Schranke. Weiter sei $f : V \to V$ eine Funktion, die $a \leq f(a)$ $(a \in V)$ erfüllt. Sei $a_0 \in V$, dann hat die Menge $V_0 := \{a \in V : a_0 \leq a\}$ einen Fixpunkt a^* mit $f(a^*) = a^*$.*

Beweis. Wir nennen eine Menge $G \subset V_0$ *abgeschlossen*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} (i)\ & a_0 \in G \\ (ii)\ & a \in G \Rightarrow f(a) \in G \\ (iii)\ & \text{Für jede Menge } M \subset G \text{, die eine kleinste} \\ & \text{obere Schranke } s \text{ besitzt, gilt } s \in G \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von V_0, der Reflexivität und Transitivität von $\leq$ und der Eigenschaft $a \leq f(a)$ ist V_0 abgeschlossen. Man rechnet auch sofort nach, dass der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Sei nun $G_0 \neq \emptyset$ die kleinste abgeschlossene Menge. Es genügt nun zu zeigen, dass G_0 eine Kette ist, denn dann gibt es nach Voraussetzung eine kleinste obere Schranke a^* von G_0. (iii) besagt, dass $a^* \in G_0 \subset V_0$ und (ii) bedeutet, dass $f(a^*) \in G_0$. Da a^* eine obere Schranke ist, gilt $f(a^*) \leq a^*$. Andererseits gilt nach Voraussetzung bereits $a^* \leq f(a^*)$, also ist a^* aufgrund der Antisymmetrie ein Fixpunkt.

Es bleibt zu zeigen, dass G_0 tatsächlich eine Kette ist. Ein Element $n \in G_0$ heißt *normal*, wenn aus $a < n$ (d.h. $a \leq n$ und $a \neq n$) stets $f(a) \leq n$ folgt. a_0 ist normal, denn es gibt kein Element $a \in G_0$, welches $a < a_0$ erfüllt. Für ein normales n ist die Menge $B_n := \{b \in G_0 : b \leq n \text{ oder } f(n) \leq b\}$ eine abgeschlossene Menge. Die erste Bedingung folgt sofort aus der Definition von V_0. Gilt $b \in B_n$, so heißt das entweder $b < n$ und damit $f(b) \leq n$, denn n ist normal, oder $b = n$ und damit $f(b) = f(n)$ oder $f(n) \leq b$ und damit $f(n) \leq b \leq f(b)$. In jedem Fall folgt (ii). Für (iii) betrachten wir eine Teilmenge M von B_n mit kleinster oberer Schranke s. Es gilt entweder $m \leq n$ für alle $m \in M$ und somit $s \leq n$, da s die kleinste obere Schranke ist, oder es gibt ein $m \in M$ mit $f(n) \leq m$, womit auch $f(n) \leq s$. In beiden Fällen folgt $s \in B_n$.

Da $B_n \subset G_0$ folgt $B_n = G_0$, denn G_0 ist die kleinste abgeschlossene Menge. Für jedes $a \in G_0$ gilt also entweder $a \leq n$ oder $n \leq f(n) \leq a$, somit ist das normale Element n mit a vergleichbar. Sei nun $N := \{n \in G_0 : n \text{ normal}\}$, dann ist auch N abgeschlossen. Wir wissen bereits, dass a_0 normal ist. Sei n normal, dann müssen wir zeigen, dass $f(n)$ normal ist, das heißt aus $a < f(n)$ folgt $f(a) \leq f(n)$ $(a \in G_0)$. Ist $a < f(n)$, so gilt $a \leq n$, denn $G_0 = B_n$. Gilt $a = n$, so ist klar, dass $f(a) = f(n)$. Gilt $a \neq n$, so ist $f(a) \leq n \leq f(n)$, da n normal ist. In beiden Fällen folgt die zweite Eigenschaft. Für (iii) sei wieder $M \subset N$ mit kleinster oberer Schranke s. Sei $a \in G_0$ mit $a < s$, dann ist a mit jedem $m \in M$ vergleichbar. Wäre $m \leq a$ für alle $m \in M$, so wäre $s \leq a$, denn s ist die kleinste obere Schranke. Wir haben aber angenommen, dass $a < s$, also gibt es ein $m \in M$ mit $a < m$. Da m normal ist, folgt $f(a) \leq m \leq s$, also ist s normal.

Genau wie vorher folgt nun $G_0 = N$, also sind je zwei Elemente von G_0 immer normal und damit vergleichbar, d.h. G_0 ist eine Kette. $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun leicht das Lemma von Zorn beweisen, welches uns die hinreichende Bedingung liefert, die wir suchen.

Lemma 4.3 (Lemma von Zorn)**.** *Sei V eine partiell geordnete Menge in der jede Kette eine kleinste obere Schranke hat. Dann hat V ein maximales Element.*

Beweis. Angenommen, V habe kein maximales Element, dann gibt es für alle $a \in V$ ein $b \in V$ mit $a < b$, also sind die Mengen $F_a := \{b \in V : a < b\}$ $(a \in V)$ nicht leer. Mit dem Auswahlaxiom können wir aus jeder Menge F_a ein Element auswählen und so eine Funktion $f : V \to V$ mit $f(a) \in F_a$ konstruieren. Die Funktion f erfüllt $a < f(a)$ für alle $a \in V$ und kann somit keinen Fixpunkt besitzen. Im Widerspruch dazu erfüllt sie aber auch die Bedingungen von Lemma 4.2 und müsste somit einen Fixpunkt a^* haben. □

Für die Aussage des Lemmas von Zorn reicht es sogar, nur die Existenz einer oberen Schranke zu fordern, die nicht notwendigerweise eine kleinste obere Schranke sein muss. Wir werden diese Aussage für unsere Zwecke aber nicht benötigen.

4.2 Der Satz von Hahn-Banach

Im Folgenden sei V ein reeller Vektorraum und $U \subsetneq V$ ein Untervektorraum. Wir stellen uns nun folgende Frage: Gegeben sei eine lineare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$; gibt es eine *lineare Fortsetzung* von f, d.h. eine Funktion F, definiert auf einem größeren Vektorraum als U, die linear ist, auf U mit f übereinstimmt und dabei gewisse Beschränkungen einhält? Bei der Beantwortung dieser Frage helfen uns *sublineare Funktionen.* Eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, wenn $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (Subadditivität) und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $(x, y \in V,\ \lambda \geq 0)$.

Es sei $z \in V \backslash U$, dann definieren wir den Untervektorraum $U[z] := \{u + \lambda z : u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dabei ist für jedes $x \in U[z]$ die Darstellung $x = u + \lambda z$ eindeutig, denn sei $x = u_1 + \lambda_1 z = u_2 + \lambda_2 z$, so folgt $(\lambda_1 - \lambda_2) z = u_2 - u_1 \in U$. Nun ist $\lambda_1 = \lambda_2$, da $z \notin U$, also gilt auch $u_1 = u_2$.

Angenommen es gibt eine sublineare Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq p(x)$ $(x \in U)$, dann lässt sich f auf $U[z]$ so fortsetzen, dass $F(x) \leq p(x)$ $(x \in U[z])$. Um das zu zeigen, genügt es, einen geeigneten Wert $t = F(z)$ festzulegen, denn dann folgt wegen der eindeutigen Darstellung von $x \in U[z]$ bereits, dass F durch $F(x) = F(u + \lambda z) = f(u) + \lambda t$ eindeutig definiert ist.

Der Wert t muss dabei so gewählt sein, dass stets $f(u) + \lambda t \leq p(u + \lambda z)$ $(u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R})$ gilt. Für $\lambda = 0$ folgt das nach Voraussetzung. Sei $\lambda > 0$, dann setzen wir $u = \lambda w$ für ein geeignetes $w \in U$. In die Ungleichung eingesetzt ergibt sich $\lambda f(w) + \lambda t \leq \lambda p(w + z)$. Für $\lambda < 0$ setzen wir ebenfalls $u = \lambda w$ und erhalten die Ungleichung $\lambda f(w) + \lambda t \leq -\lambda p(-w - z)$.

Stellen wir diese beiden Ungleichungen nach t um, so erhalten wir die Forderung

$$-p(-w_1 - z) - f(w_1) \leq t \leq p(w_2 + z) - f(w_2) \ \ (w_1, w_2 \in U).$$

Nach Voraussetzung gilt nun für alle $w_1, w_2 \in U$

$$f(w_2) - f(w_1) = f(w_2 - w_1) \leq p(w_2 - w_1) \leq p(w_2 + z) + p(-w_1 - z)$$

und somit auch

$$-p(-w_1 - z) - f(w_1) \leq p(w_2 + z) - f(w_2).$$

Diese Ungleichung bleibt richtig, wenn wir links das Supremum über alle w_1 und rechts das Infimum über alle w_2 wählen. Jeder Wert t zwischen diesen Schranken genügt dann der Behauptung.

Im endlichdimensionalen Fall folgt nun durch sukzessives Einsetzen der Basisvektoren für z, dass es eine lineare Fortsetzung F von f gibt, die auf ganz V definiert und durch p beschränkt ist. Aber auch im unendlichdimensionalen Fall gilt dieser Satz, der nach Hans Hahn und Stefan Banach benannt ist.

Satz 4.4 (Satz von Hahn-Banach)**.** *Sei V ein reeller Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Weiterhin seien $f : U \to \mathbb{R}$ linear und $p : V \to \mathbb{R}$ sublinear derart, dass $f(x) \leq p(x)$ $(x \in U)$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung F von f, die auf ganz V definiert ist, mit der Eigenschaft $F(x) \leq p(x)$ $(x \in V)$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller linearen Fortsetzungen $g : V_g \to \mathbb{R}$ von f, die $g(x) \leq p(x)$ $(x \in V_g)$ erfüllen. Diese Menge ist nicht leer, denn f ist eine Fortsetzung von sich selbst mit $V_f = U$. Sie lässt sich außerdem partiell ordnen durch

$$g_1 \leq g_2 \Leftrightarrow V_{g_1} \subset V_{g_2} \text{ und } g_1(x) = g_2(x) \ \ (x \in V_{g_1})$$

d.h. g_2 ist eine lineare Forsetzung von g_1. Sei $(g_i)_{i \in I}$ eine Kette. Für ein beliebiges $x_0 \in \bigcup_{i \in I} V_{g_i}$ gilt $g_i(x_0) = g_j(x_0)$ für alle i, j mit der Eigenschaft, dass g_i und g_j in x_0 definiert sind. Wir können also $g_0 : \bigcup_{i \in I} V_{g_i} \to \mathbb{R}$ definieren, indem wir für jedes x_0 den Wert $g_0(x_0) = g_i(x_0)$ für ein geeignetes $i \in I$ festlegen.

g_0 ist eine lineare Fortsetzung von f und es ist $g_i \leq g_0$ $(i \in I)$, also ist g_0 eine obere Schranke der Kette. Jede weitere obere Schranke muss mindestens auf $\bigcup_{i \in I} V_{g_i} = V_{g_0}$ definiert sein und dort auch mit g_0 übereinstimmen, deshalb ist g_0 sogar die kleinste obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element $F : V_F \to \mathbb{R}$ mit $F(x) \leq p(x)$ $(x \in V_F)$.

Angenommen $V_F \neq V$, dann gibt es ein $z \in V \backslash V_F$ und wir können F, wie in den Vorüberlegungen gesehen, auf $V_F[z]$ fortsetzen. Das steht im Widerspruch zur Maximalität von F. □

Die Fortsetzung von F ist nicht eindeutig, denn das Lemma von Zorn liefert lediglich die Existenz eines maximalen Elements und nicht die Eindeutigkeit. Dies wird im nächsten Abschnitt dazu führen, dass die Lösung des Inhaltsproblems im Gegensatz zum Lebesguemaß nicht eindeutig ist.

4.3 Ein Inhalt auf der reellen Achse

Wir können nun beweisen, dass das Inhaltsproblem in $\mathbb{R}$ eine Lösung hat.

Sei dazu $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}, \;\; f(x+1) = f(x)\,(x \in \mathbb{R})\}$. V ist ein Vektorraum bezüglich der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Wir setzen $M\left(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\,(x + \alpha_i)$ für beliebige reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und eine Funktion $f \in V$.

Zusätzlich setzen wir $p\,(f) := \inf\{M\,(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) : n \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Die Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ ist sublinear. Für $\lambda \geq 0$ gilt offenbar $p\,(\lambda f) = \lambda\, p\,(f)$. Seien nun $f, g \in V$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$ derart, dass $M\,(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_p) < p\,(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ und $M\,(g; \beta_1, \ldots, \beta_p) < p\,(g) + \frac{\varepsilon}{2}$. Für $\gamma_{i,j} := \alpha_i + \beta_j$ gilt dann

$$\begin{aligned}
p\,(f+g) &\leq M\,(f+g; \gamma_{1,1}, \ldots \gamma_{p,q}\,) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{p\,q} \sum_{i,j} (f+g)\,(x + \gamma_{i,j}) \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} f\,(x + \alpha_i + \beta_j) \;+\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} g\,(x + \alpha_i + \beta_j) \\
&\leq M\,(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \;+\; M\,(g; \beta_1, \ldots, \beta_q) \\
&< p\,(f) \;+\; p\,(g) \;+\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt die Subadditivität von p.

Sei nun $f \in V$ eine messbare Funktion, dann definiert $f \mapsto \int_{(0,1]} f\, d\lambda$ eine lineare Funktion vom Untervektorraum der messbaren Funktionen in V nach $\mathbb{R}$. Mit Hilfe der Transformationsformel (vgl. z.B. [Els10, S.203ff]) folgt für jede Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ (wobei wegen der Periodizität von f angenommen werden kann, dass $\alpha \in (0,1]$)

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1]} f\, d\lambda &= \int_{(0,\alpha]} f\, d\lambda \;+\; \int_{(\alpha,1]} f\, d\lambda \\
&= \int_{(1-\alpha,1]} f\,(x + \alpha - 1)\;\, d\lambda\,(x) \;+\; \int_{(0,1-\alpha]} f\,(x+\alpha)\;\, d\lambda\,(x) \\
&= \int_{(0,1]} f\,(x+\alpha)\;\, d\lambda\,(x).
\end{aligned}$$

Also gilt für alle reellen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} f \, d\lambda = \frac{1}{n} \int_{(0,1]} & f(x+\alpha_1) + \ldots + f(x+\alpha_n) \; d\lambda(x) \\ & \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i) \\ & = M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\end{aligned}$$

und damit auch $\int_{(0,1]} f \, d\lambda \leq p(f)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es nun eine nicht eindeutige, lineare Fortsetzung $F : V \to \mathbb{R}$ des Lebesgueintegrals über $(0,1]$ auf allen Funktionen in V, die durch p beschränkt ist.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Eigenschaften dieser Fortsetzung. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $f \in V$ gilt $F(f(x+x_0)) = F(f)$. Sei dazu $g(x) := f(x+x_0) - f(x)$ und $\alpha_1 := 0$, $\alpha_2 := x_0$, $\alpha_3 := 2x_0$, $\ldots$, $\alpha_n := (n-1)x_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}p(g) & \leq M(g; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ & = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x+i\cdot x_0) - f(x+(i-1)\cdot x_0) \\ & = \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x+n\cdot x_0) - f(x) \longrightarrow 0 \;\; (n\to\infty)\end{aligned}$$

da f beschränkt ist. Es folgt $F(g) \leq p(g) \leq 0$. Analog gilt

$$-F(g) = F(-g) \leq p(-g) \leq \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) - f(x+n\cdot x_0)$$

und damit $F(g) = 0$.

Weiterhin ist $F(f)$ nicht positiv für jede nicht positive Funktion $f \in V$ und nicht negativ für jede nicht negative Funktion $f \in V$. Sei dazu f eine nicht positive Funktion, dann folgt aus der Definition von $M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dass $F(f) \leq p(f) \leq M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq 0$. Ist $f \in V$ eine nicht negative Funktion, so ist $-f \in V$ nicht positiv und wegen der Linearität von F folgt $F(f) \geq 0$.

Wir setzen nun $\mathcal{J}(f) := \frac{1}{2}[F(f) + F(f(1-x))]$. Für jede messbare Funktion $f \in V$ gilt nach der Transformationsformel

$$\int_{(0,1]} f \, d\lambda = \int_{[0,1)} f(1-x) \cdot |-1| \, d\lambda(x)$$

und somit folgt auch $\mathcal{J}(f) = \int_{(0,1]} f \, d\lambda$.

Wir fassen diese Ergebnisse im folgenden Lemma zusammen.

Lemma 4.5. *Es gibt eine lineare Funktion $\mathcal{J} : V \to \mathbb{R}$ derart, dass*

$$\begin{aligned}(i)\ &\mathcal{J}(f) = \int_{(0,1]} f\, d\lambda \quad (f \in V \text{ messbar})\\ (ii)\ &\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f(x+x_0)) \quad (x_0 \in \mathbb{R}, f \in V)\\ (iii)\ &\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f(1-x)) \quad (f \in V)\\ (iv)\ &\mathcal{J}(f) \geq 0 \quad (f \in V,\ f \geq 0)\end{aligned}$$

Seien nun $E \subset (0,1]$ und $f_E \in V$ die 1-periodische Fortsetzung von 1_E. Wir setzen $m(E) := \mathcal{J}(f_E)$, dann ist m ein Inhalt auf $\mathcal{P}((0,1])$. Die Funktion m ist nicht negativ, denn f_E ist nicht negativ. Die endliche Additivität folgt aus der Linearität von $\mathcal{J}$. Ist $E \subset (0,1]$ Lebesguemessbar, so auch f_E. Aus der Eigenschaft (i) von $\mathcal{J}$ folgt nun, dass $m(E) = \lambda(E)$ und insbesondere $m((0,1]) = 1$. Aus den Eigenschaften (ii) und (iii) folgt, dass m invariant unter einer Spiegelung an $\frac{1}{2}$ und unter jeder Translation ist. Ist dabei $E + x_0 \not\subset (0,1]$, so versteht man unter $m(E + x_0)$ die Summe der Inhalte von $E + x_0 \cap (n, n+1] - n$ und $E + x_0 \cap (n+1, n+2] - (n+1)$, wenn $E + x_0 \subset (n, n+2]$. Jede Bewegung in $\mathbb{R}$ besteht aus einer Translation und eventuell einer Spiegelung an $\frac{1}{2}$, also ist m bewegungsinvariant.

Für eine beliebige Menge $E \subset \mathbb{R}$ setzen wir nun

$$m(E) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} m(E \cap (k, k+1] - k)$$

falls diese Reihe konvergiert und $m(E) := \infty$ falls sie divergiert. Wir können hier die Bezeichnung m beibehalten, denn für $E \subset (0,1]$ stimmen die beiden Definitionen überein. Die Funktion m ist eine Lösung des Inhaltsproblems auf der reellen Achse.

Wir können die selbe Konstruktion auch im $\mathbb{R}^n$ vornehmen indem wir die Periodizität von f durch $f(x + e_i) = f(x)$ für jeden Einheitsvektor e_i ersetzen. Wir erhalten einen endlich additiven Inhalt, der das Lebesguemaß fortsetzt und invariant unter Translationen sowie Spiegelungen an jeder Koordinatenachse ist. Die Invarianz gegenüber Drehungen erhalten wir so allerdings nicht.

4.4 Ein Inhalt auf der reellen Ebene

Die relativ einfache Struktur der Bewegungen im $\mathbb{R}^2$ erlaubt es uns, die Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 zu benutzen, um einen Inhalt auf der reellen Ebene zu konstruieren, der invariant gegenüber allen Bewegungen ist. Sei dazu die Funktion $\mathcal{J}$ wie in Lemma 4.5 gegeben und sei C der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{1}{2\pi}$. Da C den Umfang 1 hat, können wir jede Funktion aus V auch als beschränkte Funktion auf C betrachten und umgekehrt. Die Argumente der Funktion sind dann die Winkel aus $[0, 2\pi)$, die wir mit den Punkten aus $[0,1)$ identifizieren. $\mathcal{J}$ ist also auch auf allen beschränkten

Funktionen $f : C \to \mathbb{R}$ definiert.

Wir können $\mathcal{J}$ auch für jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $E := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ beschränkt ist, definieren. Dazu überdecken wir E mit endlich vielen Intervallen $[k, k+1)$, wobei k eine ganze Zahl sei, und betrachten die periodische Fortsetzung von f auf jedem einzelnen Intervall. Wir werden im Folgenden beide Definitionen von $\mathcal{J}$ benutzen, wobei aus dem Zusammenhang klar ist, welche jeweils gemeint ist.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschränkt und die Menge E der Punkte, auf denen f nicht 0 ist, sei ebenfalls beschränkt. Für jeden Winkel ξ führen wir eine Drehung μ_ξ^{-1} um $-\xi$ durch. Wir setzen also $f_\xi(x) := f(\mu_\xi x)$ $\left(x \in \mathbb{R}^2\right)$ und gehen nun ähnlich zum Satz von Fubini vor: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ setzen wir $g_\xi(a) := \mathcal{J}(f_\xi(a,y))$ und $\phi(\xi) := \mathcal{J}(g_\xi(x))$. Zum Schluss betrachten wir alle Winkel und setzen $\mathcal{H}(f) := \mathcal{J}(\phi(\xi))$.

Genau wie im letzten Abschnitt können wir nun einige wichtige Eigenschaften von $\mathcal{H}$ folgern: Es ist klar, dass $\mathcal{H}$ linear ist und auf nichtnegativen Funktionen stets nichtnegative Werte annimmt. Wir beweisen in drei Schritten, dass $\mathcal{H}$ invariant unter Bewegungen ist, d.h. ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit $f^1(x) = f^2(\varphi(x))$, so folgt $\mathcal{H}\left(f^1\right) = \mathcal{H}\left(f^2\right)$.

Als erstes zeigen wir die Translationsinvarianz. Es gehe f^1 durch Translation aus f^2 hevor, dann geht für jeden Winkel ξ auch f_ξ^1 durch eine Translation aus f_ξ^2 hervor, d.h. es gibt reelle Zahlen x_0 und y_0 mit $f_\xi^1(x,y) = f_\xi^2(x+x_0, y+y_0)$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Aufgrund der Translationsinvarianz von $\mathcal{J}$ folgt nun für jede reelle Zahl a

$$\begin{aligned} g_\xi^1(a) &= \mathcal{J}\left(f_\xi^1(a,y)\right) = \mathcal{J}\left(f_\xi^1(a, y-y_0)\right) \\ &= \mathcal{J}\left(f_\xi^2(a+x_0, y)\right) = g_\xi^2(a+x_0). \end{aligned}$$

Aus dem gleichen Grund folgt dann auch

$$\phi^1(\xi) = \mathcal{J}\left(g_\xi^1(x)\right) = \mathcal{J}\left(g_\xi^2(x+x_0)\right) = \mathcal{J}\left(g_\xi^2(x)\right) = \phi^2(\xi)$$

und damit schließlich auch $\mathcal{H}\left(f^1\right) = \mathcal{H}\left(f^2\right)$.

Sei nun θ ein Winkel und f^θ gehe durch die Drehung μ_θ^{-1} aus f hervor, d.h. $f^\theta(x) = f(\mu_\theta x)$ $\left(x \in \mathbb{R}^2\right)$. Für jeden Winkel ξ stimmen nun f_ξ und $f_{\xi-\theta}^\theta$ überein und damit gilt $\phi(\xi) = \phi^\theta(\xi - \theta)$. Wegen der Translationsinvarianz von $\mathcal{J}$ folgt nun $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}\left(f^\theta\right)$, d.h. $\mathcal{H}$ ist invariant unter beliebigen Drehungen.

Als letztes zeigen wir die Invarianz von $\mathcal{H}$ unter Spiegelungen an der x-Achse. f^- gehe durch Spiegelung an der x-Achse aus f hervor, d.h. $f^-(x,y) = f(x,-y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann geht für jeden Winkel ξ auch die Funktion $f_{-\xi}^-$ durch Spiegelung an der x-Achse aus f_ξ hervor. Nun folgt aus der Spiegelungsinvarianz von $\mathcal{J}$ für jede reelle Zahl a

$$g_\xi(a) = \mathcal{J}(f_\xi(a,y)) = \mathcal{J}\left(f_{-\xi}^-(a,-y)\right) = \mathcal{J}\left(f_{-\xi}^-(a,y)\right) = g_{-\xi}^-(a).$$

Damit folgt $\phi(\xi) = \phi^-(-\xi)$ und damit wiederum $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f^-)$ aus der Spiegelungsinvarianz von $\mathcal{J}$. Da sich jede Bewegung in $\mathbb{R}^2$ als Kombination dieser drei Bewegungen darstellen lässt, ist $\mathcal{H}$ invariant unter allen Bewegungen.

Sei nun f messbar und ξ ein Winkel, dann ist nach dem Satz von Fubini (vgl. z.B. [Els10, S.175ff]) für fast alle $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f_\xi(a, y)$ messbar und somit gilt fast überall

$$g_\xi(a) = \mathcal{J}(f_\xi(a, y)) = \int f_\xi(a, y)\ dy$$

da $\mathcal{J}$ eine Fortsetzung des Lebesgueintegrals in einer Dimension ist. Ebenso folgt nun

$$\phi(\xi) = \mathcal{J}(g_\xi(x)) = \int g_\xi(x)\ dx = \int \int f_\xi(x, y)\ dy\, dx$$

und damit $\mathcal{H}(f) = \int f\, d\lambda^2$, da das Lebesgueintegral nach der Transformationsformel invariant unter Drehungen ist. Wir setzen nun für jede beschränkte Teilmenge E der reellen Ebene $m^2(E) := \mathcal{H}(1_E)$. Für jede beliebige Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ setzen wir $m^2(E) := \lim_{n\to\infty} m^2\left(E \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq n\right\}\right)$ wobei die Definitionen für beschränkte Mengen wieder übereinstimmen. Die Funktion m^2 ist ein bewegungsinvarianter, endlich additiver Inhalt, der auf messbaren Mengen mit dem zweidimensionalen Lebesguemaß übereinstimmt. Damit ist der Satz von Banach vollständig bewiesen. $\square$

Literaturverzeichnis

[Ban23] S. Banach. Sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae*, IV:7–33, 1923.

[Ban32] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Monografie matematyczne. Z subwencji Funduszu kultury narodowej, 1932.

[Bea04] R. Beals. *Analysis: An Introduction.* Cambridge University Press, 2004.

[Els10] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Grundwissen Mathematik. Springer, 2010.

[Soe12] W. Soergel. Lineare Algebra 2, Vorlesungsskript. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLA2.pdf, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2012.

[Zaa67] A.C. Zaanen. *Integration.* North Holland Publishing Company, 1967.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewußt, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, den 03.09.2012 ______________________________

(Unterschrift)