# Fortsetzungsprobleme für Operatoren zwischen Banachräumen und Banachverbänden

Diplomarbeit von Wolfgang Arendt

Tübingen 1975

Anleitung: Prof. Dr. H.H.Schaefer

# E i n l e i t u n g

In vielen Gebieten der Mathematik tauchen Fort= setzungsprobleme auf. Der Satz von Hahn-Banach löst ein solches Problem in der Funktionalanalysis. In seiner Form für normierte Räume besagt er: Ist G ein normierter Vektorraum und F ein Vektorteilraum von G, so besitzt jede stetige, lineare Abbildung T von F nach $\mathbb{R}$ eine lineare Fortsetzung $\tilde{T}$ auf G mit gleicher Norm. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welche Räume in diesem Satz an die Stelle von $\mathbb{R}$ treten können, wobei die Voraus= setzungen über F, G und T noch in gewissen Grenzen 'variabel' sein sollen.

Ein solches Problem lässt sich in der Sprache der Kategorientheorie besonders bequem behandeln: Die 'sinnvollen' Modifikationen der Voraussetzungen über F, G und T laufen gerade darauf hinaus, Objekte und Morphismen einer gewissen Kategorie festzulegen, und die fraglichen Räume sind dann die injektiven Objekte dieser Kategorie. Wir beschreiben im 1.Ka= pitel einige Eigenschaften solcher Objekte in einer

beliebigen Kategorie. So ist es möglich, einige Schlussweisen allgemein darzustellen, um dann darauf im weiteren Verlauf der Arbeit zurückzugreifen.

Im 2. und 3.Kapitel wird der klassische Fall behandelt, d.h. es werden die injektiven (und die d-projektiven) Objekte der Kategorie BR der Banachräume mit den linearen Kontraktionen als Morphismen bestimmt. Explizit handelt es sich um folgendes Problem: Welche Banachräume E haben die Eigenschaft, dass jede stetige, lineare Abbildung T von einem Banachunterraum F eines Banachraumes G nach E eine stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{T}$ auf G mit gleicher Norm besitzt? Man kann zeigen, dass die Räume vom Typ C(X), X kompakt und stonesch, diese Eigenschaft haben. Kelley bewies 1952, dass sie diese Räume auch schon charakterisiert (unter den Banachräumen). Entsprechend sind die d-projektiven Banachräume genau diejenigen, deren Dual zu einem C(X) (isometrisch-) isomorph ist. Auch diese Räume kann man einfach charakterisieren: Es sind genau die Räume vom Typ $L^1(\mu)$ (Dixmier--Grothendieck).

Man würde eigentlich nicht erwarten, dass sich die Situation wesentlich ändert, wenn man statt BR die Kategorie BV der Banachverbände mit den positiven Kontraktionen als Morphismen betrachtet. Tatsächlich kann man zeigen, dass auch hier die Räume C(X), X stonesch, injektive Objekte sind, und dass entsprechend die Banachverbände $L^1(\mu)$ d-projektiv sind.

Es ist daher um so überraschender, dass Lotz 1974 bewies, dass jeder Banachverband $L^1(\mu)$ auch injektiv ist (in BV). Da die Räume $C(X)$ und $L^1(\mu)$ extrem gegensätzliche Typen von Banachverbänden darstellen, scheint also eine einfache Charakterisierung der injektiven Objekte in BV jedenfalls nicht auf der Hand zu liegen.

Wir zeigen im 4.Kapitel zunächst, dass die entsprechenden Fortsetzungsprobleme für positive bzw. reguläre Operatoren für ordnungsvollständige Banachverbände E äquivalent sind, und dass man die d-projektiven Banachverbände durch eine Eigenschaft des p-Tensorproduktes charakterisieren kann, die völlig analog zu einer entsprechenden Charakterisierung der d-projektiven Banachräume ist (2.Kapitel).

Im 5.Kapitel wird anschliessend gezeigt, dass die dualen injektiven Banachverbände durch eine ordnungstheoretische Variante der binären Durchschnittseigenschaft (2.Kapitel) gekennzeichnet sind (Cartwright).

Anders als bei dem entsprechenden Problem für Banachräume scheint die Frage, ob der Bidual eines injektiven Banachverbandes wieder injektiv ist, nicht unmittelbar zu beantworten zu sein, da ein Darstellungssatz für injektive Banachverbände nicht bekannt ist. Dieses Problem kann jedoch im 5.Kapitel positiv gelöst werden.

Neben den Räumen $C(X)$, X stonesch, und $L^1(\mu)$ sind keine einfachen Beispiele für injektive Banachverbände

bekannt. Jedoch lassen sich aus injektiven Banach=verbänden wieder neue solche Räume konstruieren. Ein sehr allgemeines Beispiel dieser Art ist der Raum $\mathscr{L}^r(E,F)$, der injektiv ist, falls $E'$ und $F$ es sind.

Herrn Prof. Dr. Schaefer verdanke ich es, in ausgezeichneten Lehrveranstaltungen an der Universität Tübingen in die Theorie der Banachverbände und positiven Operatoren eingeführt worden zu sein. Ebenso möchte ich Herrn Dr. Cartwright für viele Anregungen danken.

# 1. Kapitel

In diesem Kapitel werden injektive Objekte kategoriell definiert und einige ihrer Eigenschaften formuliert. Für diese Arbeit wird die Klasse der reellen Banachräume und die der reellen Banachverbände von besonderem Interesse sein. Es wird sinnvoll sein, sie in folgender Weise als Kategorien aufzufassen:

1. Seien E und F Banachräume. Eine lineare Abbildung $T:E \longrightarrow F$ ist ein Morphismus, wenn sie stetig und kontraktiv ist (d.h. es gilt $\|T\| \leqslant 1$). Man sieht leicht, dass die Klasse der Banachräume zusammen mit den so definierten Morphismen eine Kategorie bildet. Sie soll im folgenden mit BR bezeichnet werden.

2. In der Klasse der Banachverbände seien die Morphismen die positiven, kontraktiven linearen Abbildungen. Die so definierte Kategorie werde mit BV bezeichnet.

Diese Definitionen ergeben den üblichen Isomorphiebegriff:

1.1 Lemma: 1. Zwei Banachräume F und G sind genau dann in BR isomorph, wenn es eine bijektive, isometrische, lineare Abbildung $T:F \longrightarrow G$ gibt.

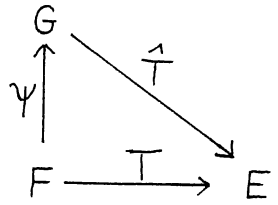
2. Zwei Banachverbände F und G sind genau dann isomorph, wenn es einen bijektiven, isometrischen Vektorverbands=homomorphismus $T:F\longrightarrow G$ gibt (d.h. T ist linear, und es gilt $T(x\vee y)=Tx\vee Ty$ und $T(x\wedge y)=Tx\wedge Ty$ für alle $x,y\in F$).

Sei C eine Kategorie. Wir bezeichnen mit Mor(F,G) die Klasse der Morphismen zwischen zwei Objekten F und G in C. In den Kategorien, die wir hier betrachten, sind Unter=objekte auf eine natürliche Weise definiert. (Formaler ausgedrückt: Es gibt eine ausgezeichnete Klasse von Mor=phismen, die wir Einbettungen nennen wollen. Ein Objekt F heisst dann Unterobjekt von G, wenn es eine Einbettung $\psi:F\longrightarrow G$ gibt. Wir schreiben: $F\leqslant G$ (bzgl. $\psi$).) In den Kategorien BR und BV bedeutet das konkret:

Definition: 1. Seien F,G Banachräume. F ist ein Unter=banachraum von G, wenn es eine isometrische, lineare Abbildung $\psi:F\longrightarrow G$ gibt.

2. Sind F,G Banachverbände, so ist F ein Unter=banachverband von G, wenn es einen isometrischen Vektorverbandshomomorphismus $\psi:F\longrightarrow G$ gibt.

Definition: Sei C eine Kategorie. Ein Objekt E in C heisst injektiv, falls für alle Objekte F,G mit $F\leqslant G$ (bzgl. der Einbettung $\psi:F\longrightarrow G$) und alle $T\in Mor(F,E)$ ein $\hat{T}\in Mor(G,E)$ existiert, so dass $T=\hat{T}\circ\psi$.



Beispiele:

1. Offenbar ist ein Banchraum E genau dann injektiv, wenn für alle Banachräume F und G mit $F \leq G$ und alle $T \in \mathcal{L}(F,E)$ eine Fortsetzung $\hat{T} \in \mathcal{L}(G,E)$ mit $\|T\| = \|\hat{T}\|$ existiert. Der Satz von Hahn-Banach für normierte Räume besagt, dass $\mathbb{R}$ ein injektiver Banachraum ist.

2. In der Kategorie der Gruppen sind die injektiven Objekte genau die teilbaren Gruppen.

3. In der Kategorie der Vektorräume mit den linearen Abbildungen als Morphismen sind alle Objekte injektiv.

4. In einigen Kategorien gibt es nur triviale injektive Objekte:

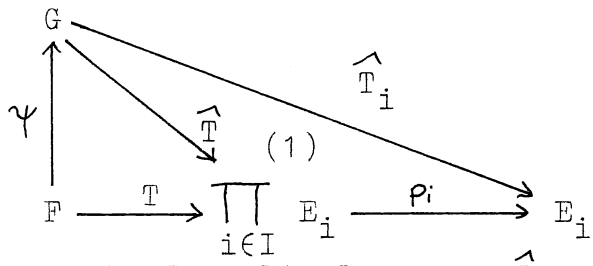
Man betrachte die Kategorie der archimedisch geord= neten Vektorverbände mit den positiven, linearen Abbildungen als Morphismen. Dann ist der Raum, der nur aus der Null besteht, das einzige injektive Objekt. Sei nämlich $E \neq \{o\}$ ein archimedisch geordneter Vektor= verband. Man betrachte die Räume $F := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ und $G := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ Dann ist F ein Untervektorverband von G. Sei $z \in E_+$, $z \neq o$. Definiert man $Te_i := z$, $i \in \mathbb{N}$, wobei $e_i$ der i-te Einheitsvektor von $F = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ ist, so kann T zu einer positiven, linearen Abbildung von F nach E fortgesetzt werden.

Annahme: T besitzt eine positive lineare Fortsetzung $\hat{T}: G \longrightarrow E$. Sei $e \in G = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ der Vektor, der in allen Kom= ponenten gleich 1 ist. Dann gilt $\sum_{i=1}^{m} e_i \leq e$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Somit gilt $\hat{T}e \geqslant \hat{T}(\sum_{i=1}^{m} e_i) = \sum_{i=1}^{m} Te_i = mz$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Also ist $z \leqq o$, da E archimedisch geordnet ist. Widerspruch.

1.2 Satz: Sei $\{E_i, i \in I\}$ eine Familie von injektiven Objekten in einer Kategorie $\underline{C}$. Dann ist auch das Produkt $E := \prod_{i \in I} E_i$ injektiv (falls es existiert).

Beweis: Seien F,G Objekte in $\underline{C}$, $F \leq G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$, und $T \in Mor(F,E)$. Sei $p_i: E \longrightarrow E_i$ die Projektion auf $E_i$, dann ist $p_i \circ T \in Mor(F,E_i)$. Da $E_i$ injektiv ist, gibt es $\hat{T}_i \in Mor(G,E_i)$, so dass $\hat{T}_i \circ \psi = p_i \circ T$. Nach der Definition des Produktes existiert dann genau ein $\hat{T} \in Mor(G, \prod_{i \in I} E_i)$, so dass das Diagramm (1)



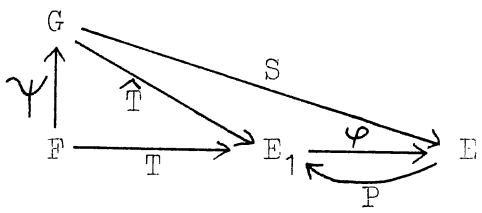

für alle $i \in I$ kommutiert. Es gilt also $p_i \circ \hat{T} \circ \psi = p_i \circ T$ für alle $i \in I$. Also muss nach der Definition des Produktes gelten: $\hat{T} \circ \psi = T$ q.e.d.

In den Kategorien $\underline{BR}$ und $\underline{BV}$ existieren Produkte:
Sei $\{E_i, i \in I\}$ eine Familie von Banachräumen. Dann ist der Raum $E := \{ (x_i)_{i \in I} \mid \sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty \}$ bzgl. der koordinatenweise definierten Addition und

Skalarmultiplikation ein Vektorraum, der bzgl. der Norm $\|(x_i)_{i\in I}\| := \sup_i \|x_i\|$ einen Banachraum bildet. Bezeichnet man mit $p_i$ die Projektionen $(x_i)_{i\in I} \longmapsto x_i$, so ist $p_i : E \longrightarrow E_i$ linear und kontraktiv. Man sieht leicht, dass $(E,(p_i)_{i\in I})$ das Produkt von $\{E_i,\ i\in I\}$ in <u>BR</u> ist. Wir schreiben $E := \prod_{i\in I} E_i$.
Sind die Räume $E_i$, $i\in I$, Banachverbände, so ist E bzgl. der koordinatenweise definierten Ordnung ein Banach=verband. Die Projektionen $p_i$, $i\in I$, sind dann positiv, und $(E,(p_i)_{i\in I})$ ist das Produkt von $\{E_i,\ i\in I\}$ in <u>BV</u>.

1.3 <u>Lemma</u>: <u>Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $E, E_1$ Objekte in $\mathcal{C}$</u>
<u>Sei E injektiv, $\varphi \in \mathrm{Mor}(E_1, E)$.</u>
<u>Wenn es einen Morphismus $P \in \mathrm{Mor}(E, E_1)$ gibt</u>
<u>mit $P \circ \varphi = 1_{E_1}$, so ist auch $E_1$ injektiv.</u>

<u>Beweis</u>: Seien F,G Objekte in $\mathcal{C}$, $F \leq G$ bzgl. $\psi : F \longrightarrow G$
$T \in \mathrm{Mor}(F, E_1)$. Dann ist $\varphi \circ T \in \mathrm{Mor}(F, E)$. Da E injektiv ist, gibt es $S \in \mathrm{Mor}(G, E)$, so dass $S \circ \psi = \varphi \circ T$.
Definiere: $\hat{T} := P \circ S$, dann kommutiert folgendes Diagramm:




□

Ein Beispiel für die in dem obigen Lemma dargestellte Situation ist in $\underline{C}$ = $\underline{BR}$ oder $\underline{BV}$ folgendermassen gegeben:

Sei E ein Banachraum (Banachverband). Die Auswertungsabbildung $Q_E: E \longrightarrow E''$ ist isometrisch (und ein Vektorverbandshomomorphismus). E lässt sich also bzgl. $Q_E$ als Unterobjekt von E'' in $\underline{BR}$ ($\underline{BV}$) auffassen. Ist E ein dualer Raum, d.h. $E=F'$ für einen Banachraum (Banachverband) F, so gilt $(Q_F)' \circ Q_E = 1_E$, und $(Q_F)'$ ist kontraktiv (und positiv). Es gilt also für einen dualen Raum E: Ist $E''$ injektiv in $\underline{BR}$ ($\underline{BV}$), so auch E.

1.4 Satz: Man betrachte folgende Aussagen für ein Objekt E in einer Kategorie $\underline{C}$ :

(a) E ist injektiv

(b) Für alle Objekte G in $\underline{C}$ mit $E \leq G$ bzgl. $\psi: E \longrightarrow G$ gibt es $P \in Mor(G,E)$ mit $P \circ \psi = 1_E$.

(c) Für alle Objekte F,G in $\underline{C}$ mit $E \leq G$ bzgl. $\psi: E \longrightarrow G$ und alle $T \in Mor(E,F)$ gibt es $\hat{T} \in Mor(G,F)$ mit $\hat{T} \circ \psi = T$.

Dann gilt: (a) impliziert (b) und (b) ist äquivalent zu (c).

Falls es in $\underline{C}$ zu jedem Objekt E ein injektives Objekt $\hat{E}$ mit $E \leq \hat{E}$ gibt, so folgt auch (a) aus (b).

Beweis: Dass die Bedingung (b) aus (a) folgt, sieht man, indem man $F := E$ und $T := 1_E$ wählt. Um aus (b) die Bedingung (c) zu beweisen, definiere man $\hat{T} := T \circ P$. Schliesslich folgt (b) aus (c) mit $F := E$ und $T := 1_E$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung folgt (a) aus (b) nach dem vorangehenden Lemma.

Statt in BR könnte man auch injektive Objekte in der Kategorie NR der normierten Vektorräume mit den kontraktiven, linearen Abbildungen als Morphismen betrachten. Das würde jedoch keine neue Situation schaffen. Es gilt nämlich:

1. Jeder injektive normierte Vektorraum ist vollständig. (Sei E ein solches Objekt, dann gibt es eine Projektion $P:\hat{E} \longrightarrow E$ von der Komplettierung $\hat{E}$ von E auf E mit Norm $\leq 1$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E. Sie besitzt einen Grenzwert x in $\hat{E}$. Es gilt: $||Px - x_n|| = ||Px - Px_n|| \leq ||P||\ ||x - x_n||$. Also ist Px (=x) Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E.)
2. Jeder injektive Banachraum ist auch injektiv in NR.

Die analogen Aussagen gelten entsprechend für BV und die Kategorie der normierten Vektorverbände mit den positiven, kontraktiven, linearen Abbildungen als Morphismen.

# 2 . K a p i t e l

In diesem Kapitel sollen die injektiven Banachräume untersucht werden.
Wir werden beweisen, dass man im klassischen Satz von Hahn-Banach $\mathbb{R}$ durch einen ordnungsvollständigen Vektorverband ersetzen kann. Diese Verallgemeinerung wird ein nützliches Hilfsmittel sein:

Definition: Sei G ein Vektorraum, E ein Vektorverband. Eine Abbildung $p: G \longrightarrow E$ heisst sublinear, falls gilt:
$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x,y \in G$, und
$p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

2.1 Satz: Sei G ein Vektorraum, E ein ordnungsvollständiger Vektorverband. Die Menge $\mathcal{G}$ aller sublinearen Abbildungen von G nach E ist bzgl. der Ordnung $\left(p \leq q :\Longleftrightarrow p(x) \leq q(x) \text{ für alle } x \in G\right)$, $(p,q \in \mathcal{G})$ induktiv geordnet, und p ist genau dann minimal in $\mathcal{G}$, wenn p linear ist.

Beweis: Ist p sublinear, so gilt:

(1) $\quad -p(x) \leq p(-x)$ für alle $x \in G$

Sei $\{p_i, i \in I\}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$. Für jedes $x \in G$ ist die Menge $\{p_i(x) \mid i \in I\}$ nach unten beschränkt. Ist nämlich $i_o \in I$, so gilt wegen (1) für alle $i \in I$ mit $p_i \leq p_{i_o}$:
$p_i(x) \geq -p_i(-x) \geq -p_{i_o}(-x)$. Daher existiert
$p(x) := \inf_i p_i(x)$, und man sieht leicht dass p sublinear ist.

Ist $p \in \mathcal{F}$ linear, so ist p minimal: Angenommen, es gibt ein $q \in \mathcal{F}$ mit $q \leq p$, so gilt wegen (1):
$p(x) = -p(-x) \leq -q(-x) \leq q(x)$ für alle $x \in G$, d.h. $p=q$.

Sei umgekehrt p minimal. Wir zeigen, dass p linear ist: Ist $y \in G$ fest gewählt, so definiert die Beziehung

(2) $\quad q(x) := \inf\{p(x+ty) - tp(y) \mid t \geq o\}$, $x \in G$,

eine sublineare Abbildung $q \in \mathcal{F}$. (Es gilt $q(o)=o$ und für $\lambda > o$ ist $\{p(\lambda x+ty) - tp(y) \mid t \geq o\} =$

$$\lambda\{p(x+t\lambda^{-1}y) - t\lambda^{-1}p(y) \mid t \geq o\} =$$

$$\lambda\{p(x+ty) - tp(y) \mid t \geq o\},$$ woraus die Beziehung $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ für alle $\lambda \geq o$, $x \in G$ folgt. Sind $x_1, x_2 \in G$, $t_1, t_2 \geq o$, so gilt:
$p(x_1+t_1y) - t_1p(y) + p(x_2+t_2y) - t_2p(y) \geq$
$p(x_1+x_2+(t_1+t_2)y) - (t_1+t_2)p(y)$, woraus folgt, dass $q(x_1+x_2) \leq q(x_1) + q(x_2)$ gilt.)
Offensichtlich ist $q \leq p$, deshalb stimmen p und q wegen der Minimalität von p überein. Setzt man $t:=1$ in (2),

so erhält man: $p(x) \leq p(x+y) - p(y)$. Da y beliebig war, beweist das die Additivität von p. Für beliebiges $x \in G$ gilt also $p(-x) = -p(x)$, und somit für $\lambda < o$ $p(\lambda x) = -\lambda p(-x) = \lambda p(x)$. Also ist p linear. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Korollar: Sei $p: G \longrightarrow E$ sublinear. Dann gibt es eine lineare Abbildung $T: G \longrightarrow E$ mit $T \leq p$.

2.2 Satz: (verallgemeinerter Satz von Hahn-Banach) Sei E ein ordnungsvollständiger Vektorverband. Sei G ein Vektorraum, F ein Vektorteilraum von G und $p: G \longrightarrow E$ eine sublineare Abbildung. Jede lineare Abbildung $T: F \longrightarrow E$, mit $Tx \leq p(x)$ für alle $x \in F$, besitzt eine Fortsetzung $\hat{T}: G \longrightarrow E$, ($\hat{T}$ linear) so dass gilt: $\hat{T}y \leq p(y)$ für alle $y \in G$.

Beweis: Man definiere folgende Abbildung:

$$q(y) := \inf\{p(y-x) + Tx \mid x \in F\} \text{ für } y \in G.$$

Das Infimum existiert, da folgende Ungleichung richtig ist: $p(y-x) + Tx \geq p(-x) - p(-y) - T(-x) \geq -p(-y)$, $x \in F$, $y \in G$. Man zeigt ähnlich wie im Beweis zum vorangehenden Satz , dass q sublinear ist. Es gilt $q_{|F} \leq T$, daher $q_{|F} = T$ nach obigem Lemma. Aus dem vorangehendem Korollar folgt die Existenz einer linearen Abbildung

$\hat{T}: G \longrightarrow E$ mit $\hat{T} \leq q \leq p$. Insbesondere gilt $\hat{T}x \leq Tx$ für alle $x \in F$, also stimmen $\hat{T}$ und $T$ auf $F$ überein.

Korollar: Jeder ordnungsvollständige AM-Raum mit Einheit ist ein injektiver Banachraum.

Beweis: Sei $E$ ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit $e$. Sei $G$ ein Banachraum, $F$ ein Banachunterraum von $G$ und $T: F \longrightarrow E$ eine lineare, kontraktive Abbildung. Man definiere $p(x) := \|x\| e$ für alle $x \in G$. $p$ ist eine sublineare Abbildung, die $T$ dominiert: Für alle $x \in G$ ist $\|Tx\| \leq \|x\|$, also gilt in $E$: $Tx \leq \|x\| e = p(x)$. Es gibt also eine lineare Fortsetzung $\hat{T}$ von $T$ die von $p$ dominiert wird. Somit gilt $\hat{T}x \leq \|x\| e$, $-\hat{T}x \leq \|x\| e$ für alle $x \in G$, und damit $\hat{T}x \in [-\|x\| e, \|x\| e]$, was bedeutet, dass $\hat{T}$ kontraktiv ist.

Sei $I$ eine Indexmenge. Der Raum $\ell^\infty(I)$ der beschränkten reellen Funktionen auf $I$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit, also ein injektiver Banachraum. Das folgt auch aus 1.2, da $\ell^\infty(I) = \prod_I \mathbb{R}$ (in BR) ist.

Sei E ein Banachraum, $U^o$ die duale Einheitskugel. Die Abbildung $\psi: E \longrightarrow \ell^\infty(U^o)$, die definiert ist durch $\psi(x) := (\langle x , x' \rangle)_{x' \in U^o}$, ist eine lineare Isometrie. Bezüglich der Einbettung $\psi$ ist also E ein Banachunterraum des injektiven Banachraumes $\ell^\infty(U^o)$. Die drei Aussagen im Satz 1.4 sind also in der Katego= rie $\underline{BR}$ äquivalent.

Seien F,G,E Banachräume, $F \leq G$ und codim F = 1. Sei $g \in G \setminus F$, dann ist $G = F + \{tg \mid t \in \mathbb{R}\}$. $T: F \longrightarrow E$ sei eine stetige, kontraktive, lineare Abbildung. Jede lineare Fortsetzung $\hat{T}: G \longrightarrow E$ von T hat dann die Form: $\hat{T}(x+tg) = Tx + tz$ für alle $x \in F$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $z \in E$ fest ist, und jedes $z \in E$ definiert eine solche Fortsetzung. Es gilt:

$$\|\hat{T}\| \leq 1 \iff \|Tx + tz\| \leq \|x + tg\| \text{ für alle } x \in F,\ t \in \mathbb{R}$$
$$\iff \|Tx - z\| \leq \|x - g\| \text{ für alle } x \in F$$
$$\iff z \in \bigcap_{x \in F} K(Tx, \|x-g\|),$$

wenn man für $y \in E$ und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq o$, mit K(y,r) die abge= schlossene Kugel in E um y mit dem Radius r bezeichnet. T besitzt also genau dann eine kontraktive, lineare Fortsetzung, wenn $\bigcap_{x \in F} K(Tx, \|x-g\|)$ nicht leer ist. Je zwei Kugeln aus der Familie $\{K(Tx, \|g-x\|), x \in F\}$ haben immer einen nicht leeren Durchschnitt, weil T kontraktiv ist (aus $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \leq \|x-g\| + \|y-g\|$ folgt $K(Tx, \|g-x\|) \cap K(Ty, \|g-y\|) \neq \emptyset$).

Definition: Sei E ein Banachraum. Die Familie $\mathcal{K} := \{K(x,r),\ x \in E,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0\}$ der abgeschlossenen Kugeln in E hat die 'binäre Durchschnittseigenschaft', wenn für jede Teilfamilie $\mathcal{K}_1 := \{K(x_\alpha, r_\alpha),\ \alpha \in A\}$ von $\mathcal{K}$, so dass je zwei Kugeln aus $\mathcal{K}_1$ einen nicht leeren Durchschnitt haben, gilt: $\bigcap_{\alpha \in A} K(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset$. Wir sagen kurz: E hat die Eigenschaft (B).

Anmerkung: Solche Durchschnittseigenschaften sind in der Mathematik nicht selten. So ist z.B. ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genau dann kompakt, wenn die Familie $\mathcal{A}$ der abgeschlossenen Teilmengen von X die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Das bedeutet: Ist $\mathcal{A}_1 := \{A_i, i \in I\}$ eine Teilfamilie von $\mathcal{A}$, so dass je endlich viele Mengen aus $\mathcal{A}_1$ einen nicht leeren Durchschnitt haben, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

2.3 Lemma: Sei E ein Banachraum mit (B). Dann ist E injektiv.

Beweis: Seien F,G Banachräume, $F \leq G$, $T: F \longrightarrow E$ linear und kontraktiv. Mit Hilfe des Lemmas von Zorn sieht man, dass es einen maximalen Teilraum $F_1$ von G gibt, auf dem T eine lineare, kontraktive Fortsetzung

$T_1 : F_1 \longrightarrow E$ besitzt. Annahme: $F_1 \neq G$. Sei $g \in G \setminus F_1$. $G_1 := F_1 + \{tg \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist ein Vektorteilraum von G. Da E die Eigenschaft (B) hat, gibt es eine lineare Fortsetzung von $T_1$ auf $G_1$ von Norm $\leq 1$. (Auf $G_1$ wird die von G induzierte Norm betrachtet.) Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $F_1$.

2.4 Lemma: Jeder ordnungsvollständige AM-Raum mit Einheit hat die Eigenschaft (B).

Beweis: Sei E ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit e. Jede Kugel K(x,r) in E ist ein Ordnungsintervall: $K(x,r) = [x-re , x+re]$.

Sei $\{ [x_\alpha , y_\alpha] , \alpha \in A\}$ eine Familie von solchen Ordnungsintervallen mit

$$[x_\alpha , y_\alpha] \cap [x_\beta , y_\beta] = [x_\alpha \vee x_\beta , y_\alpha \wedge y_\beta] \neq \emptyset$$

für alle $\alpha, \beta \in A$. Dann gilt:

$x_\alpha \leq x_\alpha \vee x_\beta \leq y_\alpha \wedge y_\beta \leq y_\beta$ für alle $\alpha, \beta \in A$. Also existieren $x := \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ und $y := \inf_{\alpha \in A} y_\alpha$, und es gilt: $x \leq y$. Somit ist

$$\bigcap_{\alpha \in A} [x_\alpha , y_\alpha] = [x , y] \neq \emptyset.$$

Das obige Lemma liefert einen zweiten Beweis dafür, dass ordnungsvollständige AM-Räume mit Einheit injektive Banachräume sind.

2.5 Lemma: Seien $E, \hat{E}$ Banachräume mit $E \leq \hat{E}$. Wenn $E$ die Eigenschaft (B) hat und es eine Projektion $P: \hat{E} \longrightarrow E$ mit $\|P\| \leq 1$ gibt, so hat auch $E$ die Eigenschaft (B).

Beweis: Sei $\{K(x_\alpha, r_\alpha), \alpha \in A\}$ eine Familie von Kugeln in $E$, von denen je zwei nicht leeren Durchschnitt haben. Sei $\hat{K}(x_\alpha, r_\alpha)$ die Kugel um $x_\alpha$ mit dem Radius $r_\alpha$ in $\hat{E}$. Nach Vorraussetzung gibt es $z \in \hat{E}$ mit $z \in \bigcap_{\alpha \in A} \hat{K}(x_\alpha, r_\alpha)$. Dann ist $Pz \in E$ und $Pz \in \bigcap_{\alpha \in A} K(x_\alpha, r_\alpha)$, da

$$\|Pz - x_\alpha\| = \|Pz - Px_\alpha\| \leq \|z - x_\alpha\| \leq r_\alpha \ .$$

2.6 Satz: Ein Banachraum ist genau dann injektiv, wenn er die Eigenschaft (B) hat.

Beweis: In 2.3 ist die eine Implikation gezeigt worden. Es bleibt zu beweisen, dass jeder injektive Banachraum $E$ die Eigenschaft (B) hat. Es gibt eine geeignete Indexmenge $I$, so dass $E \leq \ell^\infty(I)$ (Bemerkung nach dem Korollar zu 2.2). Da $E$ injektiv ist, gibt es eine kontraktive Projektion von $\ell^\infty(I)$ auf $E$ (1.4). $\ell^\infty(I)$ hat als ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit (B) (2.4), also auch $E$ nach obigem Lemma.

2.7 Lemma: Sei E ein AM-Raum und F ein Unterverband von E. Wenn P eine Projektion von E auf F ist, mit $\|P\| \leq 1$, dann ist P positiv.

Beweis: Annahme: Es gibt ein $y \in E$, $y > o$, so dass $(Py)^- > o$. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\|y\| = 1$ ist. Setze: $x := Py$ und $z := y - (\|x^-\|^{-1})x^-$. Dann ist $\|z\| \leq 1$ (denn es ist $z^+ \leq y$, also $\|z^+\| \leq \|y\| \leq 1$ und $z^- \leq (\|x^-\|^{-1})x^-$, also $\|z^-\| \leq 1$, und es gilt $\|z\| = \|z^+\| \vee \|z^-\|$, da E ein AM-Raum ist).
Es ist $Pz = x - (\|x^-\|^{-1})x^- = x^+ - (1 + \|x^-\|^{-1})x^-$, und somit $\|Pz\| = \|x^+\| \vee (1 + \|x^-\|^{-1})\|x^-\| \geq \|x^-\| + 1 > 1$, Widerspruch.

2.8 Lemma: Sei E ein Banachverband. Wenn es einen ordnungsvollständigen Banachverband $\hat{E}$ mit $E \leq \hat{E}$ und eine positive Projektion $P: \hat{E} \longrightarrow E$ gibt, so ist E ordnungsvollständig.

Beweis: Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine $\leq$-gerichtete, beschränkte Familie in E. Sie besitzt ein Supremum $\hat{x}$ in $\hat{E}$. Man rechnet leicht nach, dass $P\hat{x} = \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ in E ist.

Um den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen, soll folgende Definition vereinbart werden:

Sei C eine konvexe Menge in einem Banachraum E. Eine nicht leere, konvexe Teilmenge L von C heisst 'Facette' von C, falls jedes Segment $\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid \lambda \in [o,1]\} \subset C$, das einen inneren Punkt $\lambda_o x+(1-\lambda_o)y$, $\lambda_o \in ]o,1[$, in L besitzt, schon ganz in L enthalten ist. Ist L eine Facette von C, so sind alle Extremalpunkte von L auch Extremalpunkte von C.

2.9 Satz: Jeder injektive Banachraum ist zu einem Raum C(Y) isomorph, wo Y ein kompakter, stonescher Raum ist.

Beweis: Sei $E \neq o$ ein injektiver Banachraum. Man bezeichne mit $U^o$ die Einheitskugel von E' und mit X die $\sigma(E',E)$-Abschliessung von $Ext(U^o)$, der Menge der Extremalpunkte von $U^o$. Sei $W \subset X$ offen (bzgl. $\sigma(E',E)$) und maximal bzgl. der Eigenschaft $W \cap (-W) = \emptyset$. Eine solche Menge existiert nach dem Lemma von Zorn.

$W \cup (-W)$ ist dicht in $X \setminus \{o\}$:

Annahme: Es gibt $x' \in X \setminus (\overline{W} \cup (-\overline{W}))$, $x' \neq o$. Dann gibt es eine offene Menge $G \subset X \setminus (\overline{W} \cup (-\overline{W}))$ mit $x' \in G$. Ferner gibt es ein $x \in E$ mit $< x,x' > = 1$. Sei $M = \{y' \in X \mid <x,y'> > 1/2\}$. Dann ist M offen und $M \cap (-M) = \emptyset$. Sei $N = M \cap G$. N ist offen, somit auch

$W \cup N$, und es gilt: $(W \cup N) \cap (-(W \cup N)) = \emptyset$. Aber $N \neq \emptyset$, da $x' \in N$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $W$.

Sei $Y := \overline{W}$, versehen mit der von $(E', \sigma(E',E))$ induzierten Topologie. $Y$ ist kompakt.

Sei $\psi: E \longrightarrow C(Y)$ die Auswertungsabbildung:

$\psi(x)(x') := \langle x,x' \rangle$ für alle $x \in E$, $x' \in Y$. $\psi$ ist linear und isometrisch, denn es gilt:

$$\|\psi(x)\| = \sup_{x' \in Y} |\langle x,x' \rangle| = \sup_{x' \in X} |\langle x,x' \rangle| = \sup_{x' \in U^o} |\langle x,x' \rangle| = \|x\|.$$

Man kann also $E$ bzgl. $\psi$ als einen Banachunterraum von $C(Y)$ auffassen. Nach Vorraussetzung gibt es eine Projektion $P: C(Y) \longrightarrow E$ mit $\|P\| \leq 1$.

Sei $P': E' \longrightarrow C(Y)'$ die Adjungierte von $P$ und $\delta_{x'} \in C(Y)'$ das Diracmass im Punkt $x' \in Y$. Es gilt:

(1) $\underline{P'x' = \delta_{x'} \quad \text{für alle } x' \in W \cap \mathrm{Ext}(U^o).}$

Sei $\psi': C(Y)' \longrightarrow E'$ die Adjungierte von $\psi$, und sei $x' \in Y$. Dann gilt:

$\langle x, \psi'(\delta_{x'}) \rangle = \langle \psi(x), \delta_{x'} \rangle = \langle x,x' \rangle$ für alle $x \in E$, d.h. $\psi'(\delta_{x'}) = x'$.

Sei $\mu := P'x'$, und sei $V^o$ die Einheitskugel von $C(Y)'$. Da $\psi' \circ P' = 1_{E'}$ und $\|P'\| \leq 1$ ist, gilt $\mu \in \psi'^{-1}(\{x'\}) \cap V^o$. $\psi'^{-1}(\{x'\}) \cap V^o$ ist konvex und kompakt Wenn $\mu \neq \delta_{x'}$ ist, enthält $\psi'^{-1}(\{x'\}) \cap V^o$ mindestens zwei Extremalpunkte (Krein-Milman).

Sei $\nu \in \mathrm{Ext}(\psi'^{-1}(\{x'\}) \cap V^o)$, dann ist $\nu \in \mathrm{Ext}(V^o)$,

d.h. es gilt $\nu = \delta_{y'}$ oder $\nu = -\delta_{y'}$ für ein $y' \in Y$. Wegen $\psi'(\delta_{y'}) = y'$ und $\psi'(-\delta_{y'}) = -y'$ ist dann $x' = y'$ oder $x' = -y'$. Ist aber $x' \in W$, so gilt $-x' \notin \overline{W} = Y$, also ist $\nu = \delta_{x'}$.

Da $W$ in $X$ offen ist, ist $W \cap \mathrm{Ext}(U^o)$ dicht in $Y$ (bzgl. $\sigma(E',E)$). Die Abbildung $P': E' \longrightarrow C(Y)'$ ist stetig bzgl. $\sigma(E',E) - \sigma(C(Y)',C(Y))$. Wegen (1) gilt also:

(2) $P'y' = \delta_{y'}$ für alle $y' \in Y$. (Sei nämlich $y' \in Y$, dann gibt es ein Netz $(x'_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $W \cap \mathrm{Ext}(U^o)$, so dass $(x'_\alpha)_{\alpha \in A}$ gegen $y'$ bzgl. $\sigma(E',E)$ konvergiert. Folglich konvergiert $(P'x'_\alpha)_{\alpha \in A}$ gegen $P'y'$ bzgl. $\sigma(C(Y)',C(Y))$. Somit gilt für alle $f \in C(Y)$:

$$< f, P'y' > = \lim_{\alpha \in A} < f, P'x'_\alpha > = \lim_{\alpha \in A} f(x'_\alpha) = f(y').)$$

Für $f \in C(Y)$ und $y' \in Y$ gilt dann wegen (2):

$$\psi(Pf)(y') = < Pf, y' > = < f, P'y' > = < f, \delta_{y'} > = f(y').$$

Es ist also $\psi \circ P = 1_{C(Y)}$, womit bewiesen ist, dass $\psi$ ein Isomorphismus von Banachräumen ist.

Bleibt zu zeigen, dass Y stonesch ist:

$C(Y)$ lässt sich als Unterbanachverband von $C(Y)''$ auffassen (Schaefer (2): II 4.8). Da $C(Y)$ ein injektiver Banachraum ist, gibt es eine kontraktive Projektion von $C(Y)''$ auf $C(Y)$, die nach (2.7) positiv ist. $C(Y)$ ist ordnungsvollständig, also nach (2.8) auch $C(Y)$. Daraus folgt, dass Y stonesch ist (Schaefer (2): II 7.7). Damit ist der Satz bewiesen.

Zusammenfassend erhält man eine Charakterisation der ordnungsvollständigen AM-Räume mit Einheit unter den Banachräumen:

2.1o Satz: Für einen Banachraum E sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) E ist isomorph zu einem ordnungsvollständigen AM-Raum mit Einheit.

(b) E ist isomorph zu einem Raum C(Y), wobei Y kompakt und stonesch ist.

(c) E ist ein injektiver Banachraum.

(d) Die Familie der abgeschlossenen Kugeln in E erfüllt die binäre Durchschnittseigenschaft.

# 3 . K a p i t e l

In diesem Kapitel sollen diejenigen Banachräume beschrieben werden, deren Dualraum in BR injektiv ist.

Um eine duale Charakterisierung der isometrischen, linearen Abbildungen herzuleiten, benötigen wir folgende Form des Banachschen Homomorphiesatzes (vgl. Schaefer (1): III 2, Lemma):

3.1 Lemma: Sei E ein Banachraum, F ein normierter Vektorraum und $\varphi: E \longrightarrow F$ eine stetige, lineare Abbildung, so dass $\overline{TU}$ eine Nullumgebung in F ist (U sei die Einheitskugel von E). Dann gilt: $\overline{TU} \subset (1+\varepsilon)\, TU$ für alle $\varepsilon > 0$.

Definition: Seien F und G Banachräume. Eine lineare Abbildung $\varphi: F \longrightarrow G$ heisst metrischer Homomorphismus, falls das Bild der offenen Einheitskugel von F unter $\varphi$ die offene Einheitskugel von G ist. $\varphi$ heisst strikter metrischer Homomorphismus, wenn das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel von F unter $\varphi$ die abgeschlossene Einheitskugel von G ist.

3.2 Satz: Seien F,G Banachräume und $\varphi: F \longrightarrow G$ eine lineare Abbildung.

1. Äquivalent sind:

(a) $\varphi$ ist isometrisch

(b) $\varphi'$ ist ein strikter metrischer Homomorphismus

(c) $\varphi'$ ist ein metrischer Homomorphismus

2. Äquivalent sind:

(d) $\varphi$ ist ein metrischer Homomorphismus

(e) $\varphi'$ ist isometrisch

Beweis: 1. Die Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) folgt aus dem Satz von Hahn-Banach, (b) $\Longrightarrow$ (c) ist offensichtlich.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $x \in F$, dann gilt:

$$\begin{aligned} ||\varphi(x)|| &= \sup\{|\langle \varphi(x), y' \rangle| \; ||y'|| < 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, \varphi'(y') \rangle| \; ||y'|| < 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, x' \rangle| \; ||x'|| < 1\} \\ &= ||x||. \end{aligned}$$

2. (d) $\Longrightarrow$ (e): Sei $y' \in G'$. Es gilt:

$$\begin{aligned} ||\varphi'(y')|| &= \sup\{|\langle x, \varphi'(y') \rangle| \; ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle \varphi(x), y' \rangle| \; ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle y, y' \rangle| \; ||y|| < 1\} = ||y'||. \end{aligned}$$

(e) $\Longrightarrow$ (d): Seien U,V die abgeschlossenen Einheitskugeln von F bzw. G. Wir zeigen zunächst: $\overline{\varphi(U)} = V$. Annahme: Es gibt $y_0 \in V \setminus \overline{\varphi(U)}$.

$\{y_0\}$ ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von G, $\overline{\varphi(U)}$ ist abgeschlossen und konvex. Nach dem zweiten

Trennungssatz (Schaefer (1): II 9.2) gibt es eine abgeschlossene Hyperebene $H = \{z \in G \mid \langle z, y_o' \rangle = 1\}$, die $\{y_o\}$ und $\overline{\varphi(U)}$ strikt trennt. Es gilt also: $\langle x, \varphi'(y_o') \rangle = \langle \varphi(x), y_o' \rangle < 1$ für alle $x \in U$, d.h. es gilt $||\varphi'(y_o')|| \leq 1$, aber $\langle y_o, y_o' \rangle > 1$, und somit ist $||y_o'|| > 1$, was ein Widerspruch zur Isometrie von $\varphi'$ ist. Es gilt also $\overline{\varphi(U)} = V$, und damit nach dem obigen Lemma $\overline{\varphi(U)} \subset (1+\varepsilon)\varphi(U)$ für alle $\varepsilon > 0$, daraus folgt aber: $\varphi(\mathring{U}) = \mathring{V}$.

Jede Quotientenabbildung $q: G \longrightarrow G/F$ ist ein metrischer Homomorphismus. Die Adjungierte $q': F^o \longrightarrow G'$ ist die natürliche Einbettung. (Dabei seien F,G Banachräume, $F \leq G$. Versehen mit der Norm $||q(x)|| := \inf\{||x_1||, x_1 \in q(x)\}$ (für alle $x \in G$) ist G/F ein Banachraum, dessen Dualraum zu $F^o$ isomorph ist.) Umgekehrt ist jeder metrische Homomorphismus $\varphi: G \longrightarrow F$ eine Quotientenabbildung, da F zu $G/\mathrm{Ker}\varphi$ isometrisch-isomorph ist.

Sind E und F zwei Banachräume, so ist die $\pi$-Norm auf $E \otimes F$ durch die Eichfunktion von $\Gamma(U \otimes V)$ definiert wobei U und V die Einheitskugeln von E, bzw. F bezeichnen. Den so normierten Raum bezeichnet man mit $E \underset{\pi}{\otimes} F$, und mit $E \tilde{\otimes}_\pi F$ seine Komplettierung.

Man kann $(E \tilde{\otimes}_\pi F)'$ in BR mit $\mathcal{L}(E,F')$ identifizieren, und zwar indem man jedem $\varphi \in (E \tilde{\otimes}_\pi F)'$ die Abbildung $T_\varphi \in \mathcal{L}(E,F')$ zuordnet, die durch $\langle y, T_\varphi x\rangle := \varphi(x \otimes y)$ für alle $x \in E$ und $y \in F$ definiert ist.

Vertauscht man die Rollen von E und F, so erhält man eine Isomorphie zwischen $(E \tilde{\otimes}_\pi F)'$ und $\mathcal{L}(F,E')$, wobei jedes $\varphi \in (E \tilde{\otimes}_\pi F)'$ in $S_\varphi$ übergeht, mit $\langle x, S_\varphi y\rangle = \varphi(x \otimes y)$ für alle $x \in E$ und $y \in F$. Dabei ist $S_\varphi = T'_\varphi \circ Q_F$, wenn $Q_F: F \longrightarrow F''$ die Auswertungsabbildung bezeichnet.

Ist F ein Banachunterraum von G bzgl. einer isometrischen, linearen Abbildung $\psi: F \longrightarrow G$, so induziert $\psi$ kanonisch eine lineare Abbildung $\psi \otimes 1_E: F \tilde{\otimes}_\pi E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_\pi E$. Wegen $\psi \otimes 1_E(\Gamma(U_F \otimes V)) \subset \Gamma(U_G \otimes V)$ ($U_F$, $U_G$ Einheitskugeln von F bzw. G, V Einheitskugel von E ), ist $\psi \otimes 1_E$ kontraktiv, allerdings im allgemeinen nicht isometrisch.

3.3 Satz: Für einen Banachraum E sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) E' ist injektiv

(2) Für alle Banachräume F,G mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$ ist die kanonische Abbildung $\psi \otimes 1_E: F \tilde{\otimes}_\pi E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_\pi E$ isometrisch

(3) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ und für alle $T \in \mathcal{L}(F,E')$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Fortsetzung $\tilde{T}$ von $T$ auf $G$ mit $||\tilde{T}|| \leqslant (1+\varepsilon)||T||$.

(4) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$ und für alle $T: E \longrightarrow F'$ gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{T}: E \longrightarrow G'$ mit $\psi' \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| = ||T||$.

(5) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$ gibt es zu jeder linearen Abbildung $T: E \longrightarrow F'$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine lineare Abbildung $\tilde{T}: E \longrightarrow G'$ mit $\psi' \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| \leqslant (1+\varepsilon)||T||$.

(6) Seien $F,G$ Banachräume und $\varphi: G \longrightarrow F$ ein metrischer Homomorphismus. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $T: E \longrightarrow F$ eine lineare Abbildung $\tilde{T}: E \longrightarrow G''$, so dass $\varphi'' \circ \tilde{T} = Q_F \circ T$ und $||\tilde{T}|| = ||T||$.

Beweis: Identifiziert man $(F \tilde{\otimes}_\pi E)'$ mit $\mathcal{L}(F,E')$ und $(G \tilde{\otimes}_\pi E)'$ mit $\mathcal{L}(G,E')$, so ist die Adjungierte der Abbildung $\psi \otimes 1_E: F \tilde{\otimes}_\pi E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_\pi E$ die Einschränkungsabbildung $(\psi \otimes 1_E)': \mathcal{L}(G,E') \longrightarrow \mathcal{L}(F,E')$, die jedem $T \in \mathcal{L}(G,E')$ die Abbildung $T_{|F} = T \circ \psi$ zuordnet. Aussage (1) bedeutet, dass für alle isometrischen, linearen Abbildungen $\psi: F \longrightarrow G$ die Abbildung $(\psi \otimes 1_E)'$ ein strikter metrischer Homomorphismus ist,

Aussage (3) ein metrischer Homomorphismus. Beide sind nach Satz 3.2 zu (2) äquivalent.

Identifiziert man $(F \tilde{\otimes}_\pi E)'$ mit $\mathcal{L}(E,F')$ und $(G \tilde{\otimes}_\pi E)'$ mit $\mathcal{L}(E,G')$, so ist $(\psi \otimes_\pi 1_E)'$: $\mathcal{L}(E,G') \longrightarrow \mathcal{L}(E,F')$ die Abbildung, die jedem $T \in \mathcal{L}(E,G')$ die Abbildung $\psi' \circ T$ zuordnet. Satz 3.2 ergibt angewandt auf $\psi \otimes 1_E$ die Äquivalenz von (2),(4) und (5).

Die Implikation (4) $\Longrightarrow$ (6) sieht man, indem man (4) auf $\psi=\psi'$ und $Q_F \circ T$ anwendet.

(6) $\Longrightarrow$ (4): Seien T, $\psi$ wie in (4) gegeben. Wendet man (6) auf $Q_{F'} \circ T$ und $\varphi=\psi'$ an, so erhält man eine lineare Abbildung $S: E \longrightarrow G'''$ mit

$||S|| = ||Q_{F'} \circ T|| \leqslant ||T||$ und $Q_{F'} \circ T = \psi''' \circ S$.

$(Q_G)' \circ S$ erfüllt dann das Gewünschte, da $(Q_G)'$ eine Projektion von $G'''$ auf $G'$ mit Norm $\leqslant 1$ ist.

Einen Banachraum, der eine der äquivalenten Aussagen des Satzes 3.3 erfüllt, nennen wir <u>d-projektiv</u> (in <u>BR</u>). Auf zweierlei Arten kann man leicht einsehen, dass AL-Räume d-projektiv sind:

1. Der Dualraum eines AL-Raumes ist ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit und somit injektiv (in <u>BR</u>).
2. Nach dem Darstellungssatz von Kakutani für AL-Räume (Schaefer (2): II 8.5) ist jeder AL-Raum zu einem

Raum $L^1(\mu)$ isomorph (als Banachverband), wobei $\mu$ ein strikt positives Radonmass auf einem lokalkompakten Raum X ist. Sind F und G Banachräume, $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$, so kann man $F \tilde{\otimes}_\pi L^1(\mu)$ mit $L^1_F(\mu)$ und $G \tilde{\otimes}_\pi L^1(\mu)$ mit $L^1_G(\mu)$ identifizieren (Schaefer (1): III 6.5). Unter dieser Identifikation ist $\psi \otimes 1_{L^1(\mu)}: L^1_F(\mu) \longrightarrow L^1_G(\mu)$ die natürliche Einbettung. Sie ist offensichtlich isometrisch, also erfüllt $L^1(\mu)$ die Aussage (2) von 3.3.

Sei E ein Vektorverband. Wir bezeichnen mit $E^\star$ den Vektorverband der ordnungsbeschränkten Linearformen auf E und mit $E^\star_n$ das Band der ordnungsstetigen Linearformen in $E^\star$. Ein stonescher, kompakter Raum X heisst hyperstonesch, wenn das Dualsystem $< C(X), C(X)'_n >$ separiert ist.

3.4 Lemma: Sei E ein ordnungsvollständiger Vektorverband, und seien A und B disjunkte Ideale in $E^\star_n$. Dann ist $E = A^\circ + B^\circ$.

Beweis: Wir definieren für $f \in A$ das Nullideal

$N(|f|) := \{x \in E \mid < |x|, |f| > = o\}$ und entsprechend $N(|g|)$ für $g \in B$. Da $A^\circ$ ein Ideal in $E_+$ ist, gilt:

$A^\circ = \{x \in E \mid < x, f > = o \text{ für alle } f \in A\}$

$= \{x \in E \mid < |x|, |f| > = o \text{ für alle } f \in A\} = \bigcap_{f \in A} N(|f|)$.

Genauso ist $B^o = \bigcap_{g\in B} N(|g|)$. Nach Schaefer (2): II 4.11 ist $E = N(|f|) + N(|g|)$ für alle $f\in A$, $g\in B$. Also ist $N(|f|)^\perp \subset N(|g|)$ für alle $f\in A$, $g\in B$. (Sei nämlich $x\in N(|f|)^\perp$. Dann gibt es $x_1\in N(|f|)$, $x_2\in N(|g|)$ mit $x = x_1 + x_2$. Da $|x| \leqslant |x_1| + |x_2|$, gibt es $y_1\in [o,|x_1|] \subset N(|f|)$, $y_2\in [o,|x_2|] \subset N(|g|)$ mit $|x| = y_1 + y_2$. Aus $y_1 \leqslant |x|$ folgt $y_1\in N(|f|)^\perp$, d.h. es ist $y_1 = o$, und somit ist $|x| = y_2 \in N(|g|)$.) Damit ist $N(|f|)^\perp \subset \bigcap_{g\in B} N(|g|) = B^o$ für alle $f\in A$, woraus wiederum folgt: $(B^o)^\perp \subset N(|f|)^{\perp\perp} = N(|f|)$ für alle $f\in A$. ($N(|f|)$ ist ein Band, da $A \subset E_n^\sim$) Also ist $(B^o)^\perp \subset A^o$ und daher $E = (B^o)^\perp + B^o \subset A^o + B^o$.

3.5 Satz: (Dixmier-Grothendieck)

Sei X ein kompakter Raum. Genau dann wenn X hyperstonesch ist, besitzt C(X) einen Prädual. In diesem Fall ist jeder Prädual von C(X) zu $C(X)'_n$ isomorph.

Beweis: Sei X hyperstonesch. Da $C(X)'_n$ ein AL-Raum ist, ist $(C(X)'_n)' = (C(X)'_n)'_n$, und $(C(X)'_n)'$ ist ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit. Also gibt es einen kompakten, stoneschen Raum Y, so dass $(C(X)'_n)'$ zu C(Y) isomorph ist.

Sei $Q: C(X) \longrightarrow C(Y)$ die Auswertungsabbildung. Q ist ein Verbandshomomorphismus (Schaefer (2): II 4.8)

und injektiv, da X hyperstonesch ist. Es ist $Q(1_X) = 1_Y$, folglich ist Q isometrisch.
Sei H eine offen-abgeschlossene Teilmenge von Y. Wir zeigen, dass es eine ebensolche Teilmenge K von X gibt, so dass $Q(\chi_K) = \chi_H$.
Sei $A := \{f \in C(Y) \mid f(Y \setminus H) = \{o\}\}$ und $B := \{g \in C(Y) \mid g(H) = \{o\}\}$. A und B sind disjunkte Bänder in C(Y), und es ist $C(Y) = A + B$. Nach dem vorangehenden Lemma gilt also $C(Y) = A^{o} + B^{o}$ ($^{o}$ bzgl. $< C(X)'_n , C(Y) >$). Da $C(X)'_n$ von C(Y) getrennt wird, ist $A^{o} \cap B^{o} = \{o\}$. Also ist wiederum wegen des obigen Lemmas $C(X) = A^{o\bullet} + B^{o\bullet}$ ($^{\bullet}$ bzgl. $< C(X), C(X)'_n >$). $A^{o\bullet}$ und $B^{o\bullet}$ sind disjunkt, da X hyperstonesch ist. Da $1_X \in A^{o\bullet} + B^{o\bullet}$, gibt es eine offen-abgeschlossene Teilmenge K von X, so dass $\chi_K \in A^{o\bullet}$ und $\chi_{X \setminus K} \in B^{o\bullet}$. Somit ist $Q(\chi_K) \in A$ und $Q(\chi_{X \setminus K}) \in B$. Wegen $1_Y = Q(1_X) = Q(\chi_K) + Q(\chi_{X \setminus K})$ folgt daraus $Q(\chi_K) = \chi_H$.
Es folgt aus dem eben Gezeigten, dass Q(C(X)) die lineare Hülle von $\{\chi_H \mid H \subset Y$ offen-abgeschlossen$\}$ umfasst. Folglich ist Q(C(X)) dicht in C(Y). Da Q isometrisch ist, sind die beiden Räume gleich.

Nehmen wir jetzt an, dass C(X) der Dualraum eines Banachraumes E ist. Sei K der positive Kegel von C(X) und U die Einheitskugel von C(X). Es gilt: $K \cap \lambda U = \lambda/2(1_X + U)$ für alle $\lambda > o$. Mit dem Satz von Krein-Šmulian (Schaefer (1): IV 6.4) folgt

daraus, dass K $\sigma(C(X),E)$-abgeschlossen ist. Sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine $\geqslant$-gerichtete Familie positiver Elemente in C(X). Es gibt ein Teilnetz von $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$, das gegen eine Funktion $f\in C(X)$ $\sigma(C(X),E)$-konvergiert. Nach Schaefer (2): II 5.8 ist $f = \inf_\alpha f_\alpha$. Daraus folgt, dass X stonesch ist.

Sei $\inf_\alpha f_\alpha = o$, und sei $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in C(X) mit $|g_\alpha| \leqslant f_\alpha$ für alle $\alpha\in A$. Sei g ein Häufungspunkt von $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$. Für $x\in C := -K^\circ$ gilt $|\langle x,g_\alpha\rangle| \leqslant \langle x,f_\alpha\rangle$ für alle $\alpha\in A$. Also ist $\langle x,g\rangle = o$. Somit ist $g\in (C\cup -C)^\circ = -K^{\circ\circ}\cap K^{\circ\circ} = -K\cap K = \{o\}$. Also ist $\lim_\alpha g_\alpha = o$ bzgl. $\sigma(C(X),E)$. Daraus folgt, dass $E \subset C(X)'_n$. X ist also hyperstonesch. Da nach dem ersten Teil des Beweises $C(X)'_n$ ein Prädual von C(X) ist, gilt $E = C(X)'_n$.

Dual zu Satz 2.1o können wir jetzt aus dem obigen Satz eine Charakterisierung der AL-Räume unter den Banachräumen herleiten:

3.6 Satz: Für einen Banachraum E sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) E ist d-projektiv in BR

(b) E' ist isomorph zu einem AM-Raum

(c) E ist isomorph zu einem AL-Raum

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (c): Ist E d-projektiv, so ist E' zu einem Raum C(X) isomorph. Nach 3.5 sind dann E und $C(X)'_n$ isomorph.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Das ist offensichtlich.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Ist E' ein AM-Raum, so ist E''' als ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit injektiv. $(Q_E)'$ ist eine kontraktive Projektion von E''' auf E'. Nach 1.3 ist dann E' injektiv.

Ein Objekt in einer Kategorie C heisst projektiv, wenn es in der dualen Kategorie $C^*$ injektiv ist. Man kann leicht sehen, dass ein Morphismus $\psi$ in BR genau dann eine Einbettung (d.h. eine Isometrie) ist, wenn $\psi$ in $BR^*$ ein metrischer Homomorphismus ist. Somit ist also ein Banachraum E genau dann in BR projektiv, wenn gilt:

Sind F,G Banachräume, und ist $\varphi: G \longrightarrow F$ ein metrischer Homomorphismus, so kann man jede Abbildung $T \in \mathcal{L}(E,F)$ zu einer Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E,G)$ 'hochheben', d.h. es gilt $\varphi \circ \tilde{T} = T$.

In BR gibt es ausser dem Nullraum keine projektiven Objekte.

Wir wollen das beweisen: Da man $\mathbb{R}$ als Unterbanachverband eines jeden Banachverbandes $E \neq o$ auffassen kann, reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht projektiv ist. Sei $G := c_o$ und $F := \mathbb{R}$. Sei $\varphi \in c_o' = \ell^1$ gegeben

durch $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n > 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\sum_n \lambda_n = 1$. Man sieht leicht, dass $\varphi$ ein metrischer Homomorphismus ist. Sei $x = (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, $x \neq 0$. Dann ist $|\varphi(x)| < ||x||$. (Denn es gibt $n_0$ mit $|\nu_{n_0}| < ||x||$. Also ist $|\varphi(x)| = |\sum_n \nu_n\lambda_n| < ||x|| \sum_n \lambda_n = ||x||$.) Sei $\tilde{T}\in \mathcal{L}(\mathbb{R}, c_0)$ mit $\varphi\circ\tilde{T} = 1_{\mathbb{R}}$. Dann ist $||\tilde{T}|| = ||\tilde{T}(1)|| > |\varphi(\tilde{T}(1))| = 1 = ||1_{\mathbb{R}}||$.

Es gibt jedoch nicht triviale Banachräume E, die folgende schwächere Eigenschaft haben:

> Seien F,G Banachräume, $\varphi: G \longrightarrow F$ ein metrischer Homomorphismus und $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\tilde{T}\in\mathcal{L}(E,G)$ mit $\varphi\circ\tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| \leq (1+\varepsilon)||T||$.

Jeder Raum $\ell^1(A)$ hat diese Eigenschaft.
(Sei $T\in\mathcal{L}(\ell^1(A),F)$ mit $||T|| \leq 1$ und sei $\varepsilon > 0$. T ist durch eine Folge $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in F definiert, und zwar durch $T(\lambda_\alpha)_\alpha = \sum \lambda_\alpha x_\alpha$ für alle $(\lambda_\alpha)_\alpha \in \ell^1(A)$. Es ist $||T|| = \sup ||x_\alpha|| \leq 1$. Sei $y_\alpha \in G$ mit $\varphi(y_\alpha) = x_\alpha$ und $||y_\alpha|| \leq 1+\varepsilon$. Setze $\tilde{T}(\lambda_\alpha)_\alpha = \sum_\alpha \lambda_\alpha y_\alpha$ für alle $(\lambda_\alpha)_\alpha \in \ell^1(A)$. Dann ist $\tilde{T}\in\mathcal{L}(\ell^1(A),G)$ mit $\varphi\circ\tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| = \sup ||y_\alpha|| \leq 1+\varepsilon$.)
Grothendieck hat bewiesen, dass die obige Eigenschaft die Räume $\ell^1(A)$ in <u>BR</u> charakterisiert.

# 4 . K a p i t e l

Im folgenden sollen Fortsetzungsprobleme in der Kategorie BV behandelt werden. Die positiven, linearen Abbildungen zwischen zwei Banachverbänden sind eng mit den regulären Operatoren verwandt. Deshalb soll zunächst geklärt werden, welcher Zusammenhang zwischen den jeweiligen Fortsetzungsproblemen für diese beiden Klassen von Operatoren besteht.

Sind E und F Vektorverbände, so heisst eine lineare Abbildung $T:E \longrightarrow F$ regulär, falls sie Differenz zweier positiver, linearer Abbildungen ist. Dazu ist äquivalent, dass es eine positive, lineare Abbildung $S:E \longrightarrow F$ gibt mit $\pm T \leqslant S$. Der Raum der regulären Abbildungen von E nach F, $L^r(E,F)$, ist ein geordneter Vektorraum. Ist F ordnungsvollständig, so ist $L^r(E,F)$ ein ordnungsvollständiger Vektorverband (Schaefer (2): IV 1.3). In diesem Fall ist der positive Teil einer regulären Abbildung $T \in L^r(E,F)$ gegeben durch:

$T^+x = \sup \{Tx_1 \mid x_1 \in [o,x]\}$ für alle $x \in E_+$.

Definition: Seien F und G Vektorverbände und $\psi: F \longrightarrow G$ eine positive, lineare Abbildung. $\psi$ heisst intervallerhaltend, falls für alle $x \in F_+$ gilt: $\psi([o,x]) = [o, \psi(x)]$.

Eine positive, lineare Abbildung $\psi: F \longrightarrow G$ induziert für alle Vektorverbände E eine lineare positive Abbildung $\tilde{\psi}: L^r(G,E) \longrightarrow L^r(F,E)$, die jedem $T \in L^r(G,E)$ die Abbildung $T \circ \psi$ zuordnet.

4.1 Lemma: Sei E ein ordnungsvollständiger Vektorverband, und $\psi: F \longrightarrow G$ positiv und linear.

(a) Ist $\psi$ ein injektiver Verbandshomomorphismus, so ist $\tilde{\psi}$ intervallerhaltend.

(b) Ist $\psi$ intervallerhaltend, so ist $\tilde{\psi}$ ein Verbandshomomorphismus.

Beweis: (a) Sei $\psi: F \longrightarrow G$ ein injektiver Verbandshomomorphismus. Dann kann man F bzgl. $\psi$ mit einem Vektorunterverband von G identifizieren. $\tilde{\psi}$ ist dann die Abbildung, die jedem $T \in L^r(G,E)$ die Einschränkung $T_{|F}$ von T auf F zuordnet. Sei $T \in L^r(G,E)$ positiv und $S \in L^r(F,E)$, so dass $S \in [o, T_{|F}]$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\tilde{S} \in L^r(G,E)$ gibt mit $\tilde{\psi}(\tilde{S}) = \tilde{S}_{|F} = S$ und $\tilde{S} \in [o,T]$.

Man definiere für alle $y \in G$ $p(y) := Ty^+$. Dann ist $p: G \longrightarrow E$ sublinear mit $p(y) = o$ für alle $y \in G$, $y \leqslant o$. Für alle $x \in F$ gilt: $Sx \leqslant Sx^+ \leqslant Tx^+ = p(x)$. Nach Satz 2.2 gibt es eine Fortsetzung $\tilde{S}$ von S auf G, so dass $\tilde{S}y \leqslant p(y)$ für alle $y \in G$. Damit ist für $y \geqslant o$ $\tilde{S}y = -\tilde{S}(-y) \geqslant -p(-y) = o$, d.h. $\tilde{S}$ ist positiv, und $\tilde{S}y \leqslant p(y) = Ty$. Somit ist $\tilde{S} \in [o,T]$.

(b) Sei $\psi: F \longrightarrow G$ intervallerhaltend und $T \in L^r(G,E)$. Wir zeigen: $\tilde{\psi}(T^+) = \tilde{\psi}(T)^+$.

Sei $x \in F_+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(T)^+x = (T \circ \psi)^+x &= \sup\{T\psi(x_1) \mid x_1 \in [o,x]\} \\ &= \sup\{Ty \mid y \in \psi([o,x])\} \\ &= \sup\{Ty \mid y \in [o, \psi(x)]\} \\ &= T^+\psi(x) = \tilde{\psi}(T^+)(x).\end{aligned}$$

Sind E und F Banachverbände, so sind alle regulären Abbildungen stetig (Schaefer (2): II 5.3). Wir schreiben in diesem Fall $\mathscr{L}^r(E,F)$ an Stelle von $L^r(E,F)$.

Definition: Seien F,G Banachverbände. Eine positive, lineare Abbildung $\psi: F \longrightarrow G$ heisst fast intervallerhaltend, falls für alle $x \in F_+$ $\psi([o,x])$ dicht in $[o, \psi(x)]$ liegt.

4.2 Lemma: Seien E,F,G Banachverbände, E ordnungsvollständig. Ist $\psi: F \longrightarrow G$ eine positive, fast intervallerhaltende, lineare Abbildung, so ist die Abbildung $\tilde{\psi}: \mathcal{L}^r(G,E) \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E)$ mit $\tilde{\psi}(T) = T \circ \psi$ ein Verbandshomomorphismus.

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen vom Beweis zu 4.1 (b). Es ist zu zeigen, dass $\sup T(\psi([o,x])) \geq \sup T([o,\psi(x)])$ ist. Da T stetig ist, gilt

$$T(\psi([o,x]) \supset T(\overline{\psi([o,x])}) = T([o,\psi(x)]).$$

Der positive Kegel in einem Banachverband ist abgeschlossen, also folgt:

$$\sup T(\psi([o,x]) = \sup \overline{T(\psi([o,x]))} \geq \sup T([o,\psi(x)]).$$

Setzt man im obigen Lemma $E := \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{L}^r(F,\mathbb{R}) = F'$ und $\tilde{\psi}: G' \longrightarrow F'$ die Adjungierte von $\psi$.

4.3 Lemma: Seien F,G Banachverbände und $\psi: F \longrightarrow G$ positiv und linear. Man betrachte folgende Aussagen:

(a) $\psi$ ist fast intervallerhaltend

(b) $\psi'$ ist ein Verbandshomomorphismus

(c) $\psi$ ist ein Verbandshomomorphismus

(d) $\psi'$ ist fast intervallerhaltend

(e) $\psi'$ ist intervallerhaltend

Es gilt: (a) ist äquivalent zu (b), und die drei Aussagen (c),(d) und (e) sind äquivalent.

Beweis: Die Folgerung (a) $\Longrightarrow$ (b) ist ein Sonderfall von 4.2.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $\psi' : G' \longrightarrow F'$ ein Verbandshomomorphismus. Angenommen, es gibt $x \in F_+$ und $y \in G_+$ mit $y \in [o, \psi(x)] \setminus \overline{\psi([o,x])}$. Dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene in G, die $\{y\}$ und $\psi([o,x])$ strikt trennt. Es gibt also $y' \in G'$ und $c \in \mathbb{R}$, so dass $\langle \psi(z), y' \rangle < c < \langle y, y' \rangle$ für alle $z \in [o,x]$. Dann gilt:

$\langle \psi(x), y'^{+} \rangle = \langle x, \psi'(y'^{+}) \rangle = \langle x, \psi'(y')^{+} \rangle \leqslant c < \langle y, y' \rangle \leqslant \langle y, y'^{+} \rangle$, was ein Widerspruch zu $y \in [o, \psi(x)]$ ist.

(c) $\Longrightarrow$ (e): Wenn $\psi : F \longrightarrow G$ ein Verbandshomomorphismus ist, so können wir ähnlich wie im vorangehenden Schritt zeigen, dass für alle $y' \in G'_+$ $\psi'([o,y'])$ $\sigma(F',F)$-dicht in $[o, \psi'(y')]$ ist. Da $\psi'([o,y'])$ $\sigma(F',F)$-kompakt ist, müssen die beiden Mengen gleich sein.

(e) $\Longrightarrow$ (d) ist offensichtlich.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Ist $\psi'$ fast intervallerhaltend, so ist $\psi''$ ein Verbandshomomorphismus ((a) $\Longrightarrow$ (b)), und daher auch $\psi$.

Sind E und F Banachverbände, so definiert $||T||_r := \inf \{||S|| \mid S \in \mathcal{L}^r(E,F),\ S \geq 0,\ \pm T \leq S\}$ eine Norm auf $\mathcal{L}^r(E,F)$ bzgl. der dieser Raum vollständig ist. Ist F ordnungsvollständig, so ist $\mathcal{L}^r(E,F)$ unter dieser Norm ein ordnungsvollständiger Banachverband.

Man nennt $co(E_+ \otimes F_+)$ den projektiven Kegel von $E \otimes F$. Schlotterbeck beweist, dass es eine Norm auf $E \otimes F$ gibt (sie wird p-Norm genannt), so dass das so normierte Tensorprodukt $E \overset{\sim}{\otimes}_p F$ folgende Eigenschaften hat: Die Abschliessung des projektiven Kegels in der Komplettierung $E \overset{\sim}{\otimes}_p F$ von $E \otimes_p F$ definiert eine Ordnung auf $E \overset{\sim}{\otimes}_p F$, bzgl. der dieser Raum ein Banachverband ist. Der Dualraum von $E \overset{\sim}{\otimes}_p F$ ist (als Banachverband) isomorph zu $\mathcal{L}^r(E,F')$, und zwar ist die Isomorphie kanonisch dadurch gegeben, dass man jedem $\varphi \in (E \overset{\sim}{\otimes}_p F)'$ die Abbildung $T_\varphi \in \mathcal{L}^r(E,F')$ zuordnet, die durch $< y, T_\varphi x > = \varphi(x \otimes y)$ für alle $x \in E$, $y \in F$ definiert ist. Entsprechend kann man $(E \overset{\sim}{\otimes}_p F)'$ mit $\mathcal{L}^r(F,E')$ identifizieren, indem man jedem $\varphi \in (E \overset{\sim}{\otimes}_p F)'$ die Abbildung $S_\varphi \in \mathcal{L}^r(F,E')$ zuordnet, für die gilt: $< x, S_\varphi y > = \varphi(x \otimes y)$ für alle $x \in E$, $y \in F$. $T_\varphi$ und $S_\varphi$ sind zueinander adjungiert, in dem Sinne dass $T_\varphi' \circ Q_F = S_\varphi$ und $T_\varphi = S_\varphi' \circ Q_E$ ist.

Seien F und G Banachverbände, $\psi: F \longrightarrow G$

ein isometrischer Verbandshomomorphismus. Dann induziert $\psi$ für alle Banachverbände E kanonisch die lineare Abbildung $\psi \otimes 1_E : F \tilde{\otimes}_p E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_p E$. Sie ist ein kontraktiver Verbandshomomorphismus (denn ihre Adjungierte kann mit der Einschränkungsabbildung $\tilde{\psi} : \mathcal{L}^r(G,E') \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E')$ identifiziert werden, die intervallerhaltend und kontraktiv ist).

Analog zu Satz 3.3 wollen wir äquivalente Bedingungen dafür angeben, dass ein dualer Banachverband (in BV) injektiv ist. Dazu notieren wir zuvor einen technischen Sachverhalt:

Seien F und G Banachverbände, und sei $\psi : F \longrightarrow G$ eine positive, lineare Abbildung.

Ist $\psi$ intervallerhaltend, so gilt:

$[\psi(x), \psi(y)] = \psi([x,y])$ für alle $x,y \in F, x \leq y$.

(Es ist nämlich $\psi([x,y]) = \psi([o, y-x] + x)$

$= [o, \psi(y-x)] + \psi(x) = [\psi(x), \psi(y)]$,)

4.4 Lemma: Seien F,G Banachverbände und $\psi : F \longrightarrow G$ eine positive, intervallerhaltende, lineare Abbildung. $\psi$ ist genau dann ein (strikter) metrischer Homomorphismus, wenn $\psi$ die positive offene (abgeschlossene) Einheitskugel von F auf die positive offene (abgeschlossene) Einheitskugel von G abbildet.

Beweis: Seien U,V die offenen (abgeschlossenen) Einheitskugeln von F bzw. G.

Sei $\psi: F \longrightarrow G$ ein (strikter) metrischer Homomorphismus, d.h. es gilt $\psi(U) = V$. Da $\psi$ positiv ist, gilt $\psi(U_+) \subset V_+$. Sei $y \in V_+$. Dann gibt es $x \in U$ mit $\psi(x) = y$. Also ist $y \in [o, \psi(x^+)] = \psi([o, x^+])$. Es gibt nach Voraussetzung $x_1 \in [o, x^+]$ mit $\psi(x_1) = y$, d.h. es ist $y \in \psi(U_+)$.

Sei umgekehrt $\psi(U_+) = V_+$. Da $\psi$ positiv ist, folgt daraus $\psi(U) \subset V$. Ist $y \in V$, so ist $|y| \in V_+$. Es gibt also ein $x \in U_+$ mit $\psi(x) = |y|$. Wegen $y \in [-|y|, |y|] = [-\psi(x), \psi(x)] = \psi([-x, x])$ gibt es $x_1 \in [-x, x] \subset U$ mit $\psi(x_1) = y$, d.h. es ist $y \in \psi(U)$.

4.5 Satz: Für einen Banachverband E sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) E' ist injektiv in BV.

(2) Für alle Banachverbände F,G mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$ ist $\psi \otimes 1_E: F \tilde{\otimes}_p E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_p E$ isometrisch.

(3) Für alle F,G mit $F \leqslant G$ besitzen alle $T \in \mathcal{L}^r(F, E')$ eine Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}^r(G, E')$ mit $||T||_r = ||\tilde{T}||_r$.

(4) Für alle $F$, $G$ mit $F \leqslant G$ besitzen alle $T \in \mathcal{L}^r(F,E')$ für alle $\varepsilon > 0$ eine Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}^r(G,E')$ mit $||\tilde{T}||_r \leqslant (1+\varepsilon)||T||_r$.

(5) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ besitzen alle positiven, linearen Abbildungen $T:F \longrightarrow E$ für alle $\varepsilon > 0$ eine positive, lineare Fortsetzung $\tilde{T}$ auf $G$ mit $||\tilde{T}|| \leqslant (1+\varepsilon)||T||$.

(6) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi$ gibt es zu jedem $T \in \mathcal{L}^r(E,F')$ ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}^r(E,G')$ mit $\psi' \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}||_r = ||T||_r$.

(7) Für alle $F,G$ mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi$ gibt es zu jedem $T \in \mathcal{L}^r(E,F')$, $T \geqslant 0$, ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}^r(E,G')$, $\tilde{T} \geqslant 0$, mit $\psi' \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| = ||T||$.

(8) Seien $F,G$ Banachverbände und $\psi:G \longrightarrow F$ ein fast intervallerhaltender metrischer Homomorphismus. Zu jeder positiven, linearen Abbildung $T:E \longrightarrow F$ gibt es eine positive, lineare Abbildung $\tilde{T}:E \longrightarrow G''$ mit $\psi'' \circ \tilde{T} = Q_F \circ T$ und $||\tilde{T}|| = ||T||$.

Beweis: Identifiziert man $(F \tilde{\otimes}_p E)'$ mit $\mathcal{L}^r(F,E')$ und $(G \tilde{\otimes}_p E)'$ mit $\mathcal{L}^r(G,E')$, so ist die Adjungierte der Abbildung $\psi \otimes 1_E: F \tilde{\otimes}_p E \longrightarrow G \tilde{\otimes}_p E$ die Einschränkungsabbildung $\mathcal{L}^r(G,E') \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E')$. Aussage (3) besagt, dass für alle isometrischen Verbandshomomorphismen $\psi:F \longrightarrow G$ $(\psi \otimes 1_E)'$ ein strikter metrischer Homomorphismus, Aussage (4) ein metrischer Homomorphismus ist. Beide sind

zu (2) äquivalent nach 3.2. Die Äquivalenzen von (1) und (3) und von (4) und (5) ergeben sich aus Lemma 4.4. Identifiziert man $(F \tilde{\otimes}_p E)'$ mit $\mathcal{L}^r(E,F')$ und $(G \tilde{\otimes}_p E)'$ mit $\mathcal{L}^r(E,G')$, so ist $(\psi \otimes 1_E)'$ die Abbildung, die jedem $T \in \mathcal{L}^r(E,G')$ die Abbildung $\psi' \circ T \in \mathcal{L}^r(E,F')$ zuordnet. Satz 3.2 ergibt die Äquivalenz von (2) und (6), Lemma 4.4 die von (6) und (7). Schliesslich beweist man unter Benutzung von 4.3 die Äquivalenz von (7) und (8) genauso wie in (3.3) die Äquivalenz von (4) und (6).

Die Äquivalenz von (1) und (3) in Satz 4.5 gilt nicht nur für duale Banachverbände:

4.6 Satz: Sind E,F,G Banachverbände, E ordnungsvollständig und $F \leqslant G$, dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(a) Zu jeder positiven, linearen Abbildung $T \in \mathcal{L}(F,E)$ gibt es eine positive, lineare Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(G,E)$ mit $||T|| = ||\tilde{T}||$.

(b) Zu jeder regulären Abbildung $T \in \mathcal{L}^r(F,E)$ gibt es eine reguläre Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}^r(G,E)$ mit $||T||_r = ||\tilde{T}||_r$.

Zum Beweis wende man 4.4 an.

Man nennt einen Banachverband, der eine der äqui= valenten Bedingungen von Satz 4.6 erfüllt, d-projektiv in BV.

Ähnlich wie in BR gibt es jedoch ausser dem Nullraum keinen Banachverband E mit folgender Eigenschaft:

> Sind F,G Banachverbände, und ist $\varphi: G \longrightarrow F$ ein intervallerhaltender metrischer Homomor= phismus, so gibt es zu jeder positiven Abbildung $T \in \mathcal{L}(E,F)$ eine positive Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E,G)$ mit $\varphi \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| = ||T||$.

Das im Kapitel 3 für den analogen Sachverhalt in BR angegebene Gegenbeispiel gilt auch für diesen Fall, da die dort definierten Räume F und G Banachverbän= de sind, und die Abbildung $\varphi$ positiv und intervall= erhaltend ist.

Man sieht jedoch genauso wie in Kapitel 3, dass jeder Raum $E = \ell^1(A)$ folgende Eigenschaft hat:

> Seien F und G Banachverbände, $\varphi: G \longrightarrow F$ ein inter= vallerhaltender metrischer Homomorphismus und $T: E \longrightarrow F$ eine positive, lineare Abbildung. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Abbil= dung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E,G)$ mit $\varphi \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| \leq (1+\varepsilon)||T||$.

Diese Eigenschaft kennzeichnet jedoch in BV nicht die Räume vom Typ $\ell^1(A)$, da auch $c_0$ sie besitzt, wie man sich leicht überlegen kann.

Wir wollen zum Schluss dieses Kapitels noch ein Lemma beweisen, dass das p-Tensorprodukt als Lösung eines uni= versellen Problems charakterisiert:

4.7 Lemma: Seien E,F,G Banachverbände, und sei $\chi: E \times F \longrightarrow E \tilde{\otimes}_p F$ die kanonische bilineare Abbildung, die durch $\chi(x,y) := x \otimes y$ definiert ist. Zu jeder bilinearen, positiven Abbildung $b: E \times F \longrightarrow G$ gibt es genau eine positive, lineare Abbildung $T: E \tilde{\otimes}_p F \longrightarrow G$ mit $||T|| = ||b||$, so dass $T \circ \chi = b$.

Beweis: Sei $b: E \times F \longrightarrow G$ bilinear und positiv. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $S: E \otimes F \longrightarrow G$ mit $S \circ \chi = b$. S ist positiv bzgl. der durch den projektiven Kegel auf $E \otimes F$ definierten Ordnung. Es bleibt zu zeigen, dass S stetig ist und die gleiche Norm wie b hat. Dann nämlich besitzt S eine normgleiche Fortsetzung auf $E \tilde{\otimes}_p F$, die die Behauptung erfüllt.

Sei $z' \in G'_+$, dann ist $z' \circ b \in \mathcal{B}(E,F)$. Da $z' \circ b$ positiv ist, entspricht $z' \circ b$ kanonisch einer Abbildung aus $\mathcal{L}^r(E,F')$, der wiederum ein Element $\varphi \in (E \tilde{\otimes}_p F)'$ mit gleicher Norm entspricht. Dabei ist $\varphi(x \otimes y) = z'(b(x,y))$ für alle $x \in E$, $y \in F$.

Es ist also $\varphi = z' \circ S$ und

$\sup\{ |z'(b(x,y))| \mid x,y \geq o, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \}$

$= ||z' \circ b|| = ||\varphi|| =$

$\sup\{ |z'(S(u))| \mid u \in E \tilde{\otimes}_p F, ||u||_p \leq 1 \}$. Daher gilt:

$$||b|| = \sup\{\ |z'(b(x,y))|\quad |x,y\geq o,\ ||x||\leq 1,\ ||y||\leq 1,\ z'\in G'_+,\ ||z'||\leq 1\}$$

$$= \sup\{\ |z'(S(u))|\quad |u\in E_+\otimes F_+,\ ||u||_p\leq 1,\ z'\in G'_+,\ ||z'||\leq 1\}$$

$$= ||S||.$$

Korollar: Das p-Tensorprodukt ist assoziativ, das heisst: Sind $E_1, E_2, E_3$ Banachverbände, so ist $E_1 \tilde{\otimes}_p (E_2 \tilde{\otimes}_p E_3)$ isomorph zu $(E_1 \tilde{\otimes}_p E_2) \tilde{\otimes}_p E_3$.

Beweis: Sei $H_1 := E_1 \tilde{\otimes}_p (E_2 \tilde{\otimes}_p E_3)$ und $H_2 := (E_1 \tilde{\otimes}_p E_2) \tilde{\otimes}_p E_3$ und $\chi_i : E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow H_i$ ($i=1,2$) die kanonische multilineare Abbildung. Dann erfüllt sowohl $(H_1, \chi_1)$ als auch $(H_2, \chi_2)$ das universelle Problem:

Für alle multilinearen, positiven Abbildungen $m: E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow G$ (G Banachverband) gibt es genau eine positive, lineare Abbildung $T: H_i \longrightarrow G$ ($i=1$ oder $i=2$) mit $\chi_i \circ T = m$ und $||T|| = ||m||$.

Solche Objekte sind eindeutig in BV.

Dieses Korollar wird in Kapitel 5 Anwendung finden.

# 5 . K a p i t e l

In diesem Kapitel werden die injektiven Banach= verbände untersucht. Es wird sich zeigen, dass die Klasse der injektiven Banachverbände grösser ist als die der injektiven Banachräume: Ordnungsvoll= ständige AM-Räume mit Einheit sind injektiv in BV, aber auch AL-Räume. In einer systematischen Unter= suchung wird analog zur 'binären Durchschnittseigen= schaft' für Banachräume (2.6) eine Durchschnitts= eigenschaft für Banachverbände angegeben, die für endlichdimensionale und duale Banachverbände zur Injektivität äquivalent ist.

5.1 Satz: Jeder ordnungsvollständige AM-Raum mit Einheit ist injektiv in BV.

Wir wollen drei verschiedene Beweise dieses Satzes angeben:

1.Beweis: Sei E ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit der Einheit e. Seien F,G Banachverbände, mit $F \leqslant G$, und $T:F \longrightarrow E$ eine kontraktive, positive,

lineare Abbildung. Sei $p:G \longrightarrow E$ die Abbildung, die durch $p(y) := ||y^+||e$ für alle $y \in G$ definiert ist. p ist sublinear, und es gilt $p(y) = o$ für alle $y \in G$, $y \leqslant o$ und $Tx \leqslant p(x)$ für alle $x \in F$. Nach 2.2 gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{T}:G \longrightarrow E$, die T fortsetzt und für die gilt: $\tilde{T}y \leqslant p(y)$ für alle $y \in G$. Sei $y \geqslant o$, dann ist $\tilde{T}y = -\tilde{T}(-y) \geqslant -p(-y) = o$, d.h. $\tilde{T}$ ist positiv. Wegen $\tilde{T}y \leqslant ||y^+||e$ für alle $y \in G$ ist $\tilde{T}$ kontraktiv.

2.Beweis: Ist E ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit, so ist $\mathcal{L}^r(F,E) = \mathcal{L}(F,E)$ für alle Banachverbände F. (Sei nämlich $T \in \mathcal{L}(F,E)$ kontraktiv. Für $x \in F$, $||x|| \leqslant 1$ ist dann $Tx \in [-e,e]$. Daher existiert für $x \in F_+$ $|T|x = \sup\{Ty \mid y \in [-x,x]\} \subset [o,e]$, und es ist $||T||_r \leq 1$.) Da E in BR injektiv ist, folgt die Behauptung aus 4.6.

3.Beweis: Als eine Folgerung des Fortsetzungssatzes von Bauer-Namioka (Schaefer (2): II 4.6) sieht man leicht, dass $\mathbb{R}$ ein injektiver Banachverband ist (Schaefer (2): II 5.6). Sei E ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit. Nach 2.1o kann man E mit einem Raum C(Y) identifizieren, wobei Y kompakt und stonesch ist. C(Y) ist ein Banachunterverband von $\ell^\infty(Y)$. Da C(Y) in BR injektiv ist, gibt es eine kontraktive Projektion von $\ell^\infty(Y)$ auf C(Y), die nach 2.7 positiv ist. Da $\mathbb{R}$ in BV injektiv ist, ist es auch $\ell^\infty(Y)$ (1.2) und somit auch E = C(Y) nach 1.3.

Jeder n-dimensionale archimedisch geordnete Vektor=verband ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$, versehen mit der natürlichen Ordnung (Schaefer (1): V ex. 21(a)). Somit ist jeder n-dimensionale Banachverband zum $\mathbb{R}^n$ in BV isomorph, wobei man annehmen kann, dass $\mathbb{R}^n$ so normiert ist, dass alle Einheitsvektoren die Norm 1 haben.

5.2 Lemma: Jeder endlichdimensionale AL-Raum ist injektiv in BV.

Beweis: Aus dem oben Gesagten folgt sofort, dass jeder n-dimensionale AL-Raum zu $\ell^1(n)$ isomorph ist. Seien F,G Banachverbände, $F \leqslant G$ bzgl. $\psi: F \longrightarrow G$, und sei $T: F \longrightarrow \ell^1(n)$ positiv. Dann gibt es $x_1', x_2', \ldots, x_n' \in F_+'$, so dass $Tx = (< x, x_1' >, \ldots, < x, x_n' >)$ für alle $x \in F$. Es gilt $||T|| = \sup\{\sum_{i=1}^{n} < x, x_i' > | x \in F_+, ||x|| \leqslant 1\}$ $= ||\sum_{i=1}^{n} x_i'||$. Sei $x' := \sum_{i=1}^{n} x_i'$.

Da $\mathbb{R}$ ein injektiver Banachverband ist, gibt es $y' \in G_+'$ mit $\psi'(y') = x'$ und $||y'|| = ||x'|| = ||T||$. Da die Abbildung $\psi': G' \longrightarrow F'$ intervallerhaltend ist, gibt es $y_1' \in [o, y']$ mit $\psi'(y_1') = x_1'$. Es ist $x_2' \in [o, x' - x_1'] = [o, \psi'(y' - y_1')] = \psi'([o, y' - y_1'])$. Daher gibt es $y_2' \in [o, y' - y_1']$ mit $\psi'(y_2') = x_2'$. Fährt man so fort, so erhält man $y_1', y_2', \ldots y_n' \in G_+'$

mit $\sum_{i=1}^{n} y_i' = y'$ und $\psi'(y_i') = x_i'$ für alle i.

Man definiere $\tilde{T} \in \mathcal{L}(G, \mathcal{L}^1(n))$ durch

$\tilde{T}(y) := (< y, y_i' >)_i$ für alle $y \in G$. Dann ist $\tilde{T} \geqslant o$,

und es gilt $\psi' \circ \tilde{T} = T$ und $||\tilde{T}|| = ||y'|| = ||x'||$

$= ||T||$.

5.3 Lemma: Sei X ein total unzusammenhängender, kompakter Raum. Dann gibt es eine gerichtete Familie $\{E_\alpha , \alpha \in A\}$ von endlichdimensionalen Unterverbänden von C(X), so dass $C(X) = \bigcup_\alpha E_\alpha$.

Beweis: Sei A die Menge der endlichen Zerlegungen von X in offen-abgeschlossene Teilmengen. A ist gerichtet bzgl. der Ordnung: $\alpha \leqslant \beta \iff$ $\beta$ verfeinert $\alpha$. Sei $E_\alpha$ die lineare Hülle von $\{\chi_O, O \in \alpha\}$, wobei $\chi_O$ die charakteristische Funktion von O bezeichnet. $E_\alpha$ ist ein endlichdimensionaler Unterverband von C(X), und die Familie $\{E_\alpha , \alpha \in A\}$ ist bzgl. der Inklusion gerichtet. Es gilt $\overline{\bigcup_\alpha E_\alpha} = C(X)$. (Sei nämlich $f \in C(X)$ und $\varepsilon > o$, dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offen-abgeschlossene Menge $U_x$, so dass $f(U_x) \subset ]f(x) - \varepsilon , f(x) + \varepsilon [$ und $x \in U_x$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1 \ldots x_n$, so dass $\{U_{x_i}, i=1..n\}$ X überdeckt. Sei $\alpha = \{O_\nu, \nu = 1..m\} \in A$ eine Verfeinerung von $\{U_{x_i}, i=1...n\}$ mit $O_\nu \neq \emptyset$ für alle $\nu$. Wähle $x_\nu \in O_\nu$ und definiere $g := \sum_\nu f(x_\nu) \chi_{O_\nu}$. Dann gilt $||f-g|| < \varepsilon$.)

Man sagt, dass ein Banachverband E die Eigenschaft (P) hat, wenn es eine positive, kontraktive Projektion von E'' auf E gibt. Jeder AL-Raum hat die Eigenschaft (P), (da er ein Band in seinem Bidual ist,) und alle dualen Banachverbände haben (P). (Man betrachte $(Q_F)'$, falls E=F'.) Ist E ein Banachverband mit (P), und ist E'' injektiv, so ist es auch E nach 1.3.

5.4 Satz: Jeder AL-Raum ist injektiv in BV.

Beweis: Sei L ein AL-Raum. Nach der obigen Bemerkung reicht es zu zeigen, dass L'' injektiv ist. Der Raum E:= L' ist ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit, also isomorph zu einem Raum C(X), X stonesch. Nach 5.3 gibt es eine gerichtete Familie $\{E_\alpha , \alpha\in A\}$ von endlichdimensionalen Unterverbänden von E, so dass $E = \overline{\bigcup_\alpha E_\alpha}$ . Sei A geordnet durch die Beziehung: $\alpha\leqslant\beta \Longleftrightarrow E_\alpha \subset E_\beta$ . E induziert eine M-Norm auf $E_\alpha$ , somit ist $E_\alpha'$ ein endlichdimensionaler AL-Raum, also injektiv nach 5.2. Seien $\tau_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ und $\tau_{\alpha\beta} : E_\alpha \longrightarrow E_\beta, \alpha\leqslant\beta$ , die natürlichen Einbettungen. Sind F,G zwei vorgegebene Banachverbände mit $F \leqslant G$ und $T\in\mathcal{L}(F,E')$ eine positive, kontraktive Abbildung, so gibt es für alle $\alpha\in A$ eine positive, kontraktive Abbildung $T_\alpha\in\mathcal{L}(G,E_\alpha')$ mit $\tau_\alpha'\circ T = T_{\alpha|F}$. Wir verändern $T_\alpha$ so, dass

$\tau'_{\alpha\beta} \circ T_\beta = T_\alpha$ , falls $\alpha \leq \beta$.

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der feiner als der Sektionsfilter von A ist. Da die Einheitskugel von $\mathcal{L}^r(G,E'_\alpha)$ bzgl. der schwachen $*$-Operatortopologie kompakt ist, konvergiert das Netz $\{\tau'_{\alpha\beta} \circ T_\beta , \alpha \leq \beta\}$ für diese Topologie bzgl. $\mathcal{U}$ gegen eine Abbildung $\tilde{T}_\alpha \in \mathcal{L}(G,E'_\alpha)$. Wir schreiben $\tilde{T}_\alpha = \lim_{\alpha \leq \beta, \mathcal{U}} \tau'_{\alpha\beta} \circ T_\beta$. Es folgt leicht, dass $\tilde{T}_\alpha$ positiv und kontraktiv und eine Fortsetzung von $\tau'_\alpha \circ T$ ist.

Es gilt $\tau'_{\alpha\beta} \circ \tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\alpha$ für $\alpha \leq \beta$ :

Da nämlich die Abbildung $\mathcal{L}^r(G,E'_\beta) \longrightarrow \mathcal{L}^r(G,E'_\alpha)$, die jedem $S \in \mathcal{L}^r(G,E'_\beta)$ die Abbildung $\tau'_{\alpha\beta} \circ S$ zuordnet, schwach $*$-stetig ist, gilt:

$$\tau'_{\alpha\beta} \circ \tilde{T}_\beta = \lim_{\gamma \geq \beta, \mathcal{U}} \tau'_{\alpha\beta} \circ \tau'_{\beta\gamma} \circ T_\gamma = \lim_{\gamma \geq \beta, \mathcal{U}} \tau'_{\alpha\gamma} \circ T_\gamma = \tilde{T}_\alpha .$$

Sei $y \in G$. Indem man jedem $x \in E_\alpha$ $< x, \tilde{T}\, y >$ zuordnet, definiert man eine Linearform auf $\bigcup_\alpha E_\alpha$ von Norm $\leq ||y||$. Ihre stetige Fortsetzung auf E nennen wir $\tilde{T}y$. Damit ist eine positive, kontraktive Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(G,E')$ definiert, für die gilt:

$\tilde{T}_{|F} = T$.

Sei E ein Banachverband und $x' \in E'_+$. Sei $N := \{x \in E | < |x| , x' > = o\}$ das Nullideal von x'. Die Norm $p(x+N) := < |x| , x' >$ für alle $x \in E$ macht E/N zu einem normierten Vektorverband. Wir bezeichnen mit (E,x') seine Vervollständigung und mit $j_{x'} : E \longrightarrow (E,x')$ die

Quotientenabbildung. Für $x \in E$ gilt dann $||j_{x'}(x)|| = < |x|, x' >$. $(E,x')$ ist also ein AL-Raum. Sei $\tilde{E} := \prod_{x' \in U_+^o} (E,x').(U \text{ Einheitskugel von } E)$. Die Abbildung $j: E \longrightarrow \tilde{E}$ mit $j(x) := (j_{x'}(x))_{x' \in U_+^o}$ ist ein isometrischer Verbandshomomorphismus, d.h. es gilt $E \leqslant \tilde{E}$ bzgl. j. Zu jedem Banachverband haben wir somit einen injektiven Banachverband $\tilde{E}$ konstruiert mit $E \leqslant \tilde{E}$. Damit ist gezeigt, dass die drei Aussagen von 1.4 in BV äquivalent sind.

Definition: Ein Banachverband E hat die Eigenschaft $(P_1)$, falls gilt: Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine gerichtete Familie von positiven Elementen in E mit $||x_\alpha|| \leqslant 1$ für alle $\alpha \in A$, so existiert $\sup_\alpha x_\alpha$, und es ist $||\sup_\alpha x_\alpha|| \leqslant 1$.

Die Eigenschaft $(P_1)$ ist schwächer als (P), denn es gilt offensichtlich:

1. Jeder duale Banachverband hat $(P_1)$.
2. Ist G ein Banachverband mit $(P_1)$, $F \leqslant G$, und gibt es eine positive, kontraktive Projektion von G auf F, so hat auch F die Eigenschaft $(P_1)$.

Wir wollen für das Folgende vereinbaren, dass F,G immer Banachverbände bezeichnen mit $F \leqslant G$. Sind F,G vorgegeben, so sagen wir:

Ein Banachverband E hat die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft, wenn für jede positive Abbildung $T \in \mathcal{L}(F,E)$ eine positive Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf G mit gleicher Norm existiert.

5.5 Lemma: Sei E ein Banachverband mit $(P_1)$. Dann hat E die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft, wenn F ein Ideal in G ist. Es gilt ferner: Ist $T \in \mathcal{L}(F,E)$ eine positive, kontraktive Abbildung, so wird durch $\tilde{T}x := \sup\{Ty \mid y \in [o,x] \cap F\}$ für alle $x \in G_+$ eine positive, kontraktive Fortsetzung von T definiert. Sie ist die kleinste positive Fortsetzung von T.

Beweis: Für jedes $x \in G_+$ ist die Menge $\{Ty \mid y \in [o,x] \cap F\}$ gerichtet und normbeschränkt. Wegen $(P_1)$ existiert $\tilde{T}x := \sup\{Ty \mid y \in [o,x] \cap F\}$ und es gilt $||\tilde{T}x|| \leq ||x||$. $\tilde{T}$ ist also auf dem positiven Kegel von G definiert und dort positiv homogen und additiv, da F ein Ideal von G ist. Man kann $\tilde{T}$ also auf ganz G fortsetzen, und $\tilde{T}$ hat dann die gewünschten Eigenschaften: $0 \leqslant \tilde{T}$, $||\tilde{T}|| \leqslant 1$ und $\tilde{T}_{|F} = T$.
Ist S eine andere solche Fortsetzung von T, so gilt für $y \in [o,x] \cap F$ $(x \in G_+)$: $Ty = Sy \leqslant Sx$ und somit $\tilde{T}x = \sup\{Ty \mid y \in [o,x] \cap F\} \leqslant Sx$, d.h. $\tilde{T} \leqslant S$.

Sei E ein Banachverband mit $(P_1)$. Wir wollen eine Bedingung dafür finden, dass E die (F,G)-Fortsetzungs=eigenschaft für Banachverbände F,G mit $\dim(G/F) = 1$ hat.

1.Fall: F ist ein Ideal in G. Dann hat E die (F,G)--Fortsetzungseigenschaft nach obigem Lemma.

2.Fall: F ist kein Ideal in G. Dann gibt es $g \in G \setminus F$, so dass mindestens ein $u \in F$ mit $u \leqslant g$ und ein $v \in F$ mit $v \geqslant g$ existiert. Sei $T \in \mathscr{L}(F,E)$ positiv und kontraktiv. Jede lineare Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf G ist durch ein $z \in E$ durch $\tilde{T}(x+tg) = x + tz$ für alle $x \in F$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben, und jedes $z \in E$ definiert auf diese Weise eine Fortsetzung von T. Man sieht leicht:

1. $\tilde{T}$ ist genau dann positiv, wenn $z \in \bigcap_{u \leq g \leq v} [Tu, Tv]$.
2. Ist $\tilde{T}$ positiv, so gilt $||\tilde{T}|| \leqslant 1$ genau dann, wenn $z \in \bigcap_{u \leq g \leq v} K(Tu, ||g-u||) \cap K(Tv, ||v-g||)$.

($K(w,r)$ sei die Kugel in E um w mit dem Radius $r \in \mathbb{R}_+$)

Insgesamt ergibt sich:

$\tilde{T}$ ist positiv und kontraktiv, genau dann, wenn $z \in \bigcap_{u \leq g \leq v} [Tu, Tv] \cap K(Tu, ||g-u||) \cap K(Tv, ||v-g||)$.

Wegen $(P_1)$ existieren $x := \sup\{Tu \mid u \leqslant g\}$ und $y := \inf\{Tv \mid g \leqslant v\}$, und es gilt:

$||x-Tu|| \leqslant ||g-u||$ für alle u mit $u \leqslant g$ und

$||Tv-y|| \leqslant ||v-g||$ für alle $v \geqslant g$.

Definiert man $\{K(x_\alpha, r_\alpha), \alpha \in A\}$ als die Familie der Kugeln $K(Tu, ||g-u||)$ mit $u \leqslant g$, und $\{K(y_\beta, s_\beta), \beta \in B\}$ als die Familie der Kugeln $K(Tv, ||v-g||)$ mit $g \leqslant v$, so erfüllt das System

$\{K(x_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, K(y_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, x, y\}$ folgende Bedingungen:

1. $x_\alpha \leqslant x \leqslant y \leqslant y_\beta$ für alle $\alpha\in A$, $\beta\in B$
2. $K(x_\alpha, r_\alpha)\cap K(y_\beta, s_\beta) \neq \emptyset$ für alle $\alpha\in A$, $\beta\in B$
3. $x\in \bigcap_{\alpha\in A} K(x_\alpha, r_\alpha)$ und $y\in \bigcap_{\beta\in B} K(y_\beta, s_\beta)$

Definition: Ein Banachverband E hat die Eigenschaft (O), wenn für jedes System von Kugeln in E $\{K(x_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, K(y_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, x, y\}$, das die obigen Bedingungen 1.,2. und 3. erfüllt, die Menge $\bigcap_{\alpha,\beta}([x,y]\cap K(x_\alpha, r_\alpha)\cap K(y_\beta, s_\beta))$ nicht leer ist.

Wir fassen die obigen Überlegungen in einem Lemma zusammen:

5.6 Lemma: Hat ein Banachverband E die Eigenschaften $(P_1)$ und (O), so besitzt E die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G mit $\dim(G/F) = 1$.

Anders als bei dem entsprechenden Problem in der Kategorie der Banachräume (vgl. Beweis von 2.3) kann man in BV aus der (F,G)-Fortsetzungseigenschaft für den Fall $\dim(G/F)=1$ noch nicht die Injektivität eines Banachverbandes folgern: Ein Schluss mit dem Lemma von Zorn ist hier nicht möglich.

Zu $(F,G)$ existiert nämlich im allgemeinen kein Banachverband $F_1$ mit $F \leqslant F_1 \leqslant G$ und $\dim(F_1/F) = 1$. (Man nehme z.B. für G den Raum $C[o,1]$ und für F den Unterverband der konstanten Funktionen in $C[o,1]$. Dann gibt es keinen endlichdimensionalen Unterver= band $F_1$ von $C[o,1]$ mit $F \leqslant F_1$ und $F \neq F_1$)

5.7 Lemma: Seien F,G Vektorverbände, $F \leqslant G$, dimG = n. Dann gibt es Vektorverbände $F_1, \ldots F_{m-1}$, so dass $F_i \leqslant F_{i+1}$ und $\dim(F_{i+1}/F_i) = 1$ für $i=o,\ldots m-1$, wobei $F_o := F$, $F_m := G$.

Beweis: Da dimG=n, ist G als Vektorverband zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.

1.Fall: F ist ein Ideal von G. Dann gibt es $I \subset \{1,\ldots n\}$, so dass $F = \{(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n \mid x_i = o \text{ für } i \in I\}$. Daraus folgt die Behauptung.

2.Fall: F ist kein Ideal in G. Dann gibt es eine Basis $\{y_1 \ldots y_m\}$ von F mit $y_j > o$ und $y_j \wedge y_{j'} = o$ für $j,j' \in \{1\ldots m\}$, $j \neq j'$. Da F kein Ideal in G ist, gibt es $j_o$, so dass $y_{j_o} = a+b$ mit $a,b > o$, $a \wedge b = o$. Wähle $F_1$= lineare Hülle$(F,\{a\})$. Dann ist $F \leqslant F_1 \leqslant G$ und $\dim(F_1/F) = 1$. Die Behauptung folgt nun aus 1. und 2. durch Induktion.

5.8 Lemma: Sei E ein Banachverband mit (O). Dann hat E die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft, wenn $\dim G < \infty$.

Beweis: 1.Fall: F ist ein Ideal von G. Dann ist F ein Band, und es ist $G = F + F^{\perp}$. Man kann jede positive Abbildung $T \in \mathcal{L}(F,E)$ durch o auf $F^{\perp}$ positiv fortsetzen.

2.Fall: F ist kein Ideal in G. Wegen des vorangehenden Lemmas können wir annehmen, dass $\dim(G/F) = 1$. Sei $T \in \mathcal{L}(F,E)$ positiv und kontraktiv. Sei $g \in G \setminus F$, so dass $\{u \in F \mid u \leqslant g\} \neq \emptyset$ und $\{v \in F \mid g \leqslant v\} \neq \emptyset$.

Man definiere: $u_1 := \sup\{u \in F \mid u \leqslant g\}$ und $v_1 := \inf\{v \in F \mid g \leqslant v\}$. $u_1, v_1$ existieren, da F endlichdimensional und somit ordnungsvollständig ist.

Sei $x := Tu_1$ und $y := Tv_1$. Dann erfüllt das System $\{K(Tu, ||g-u||)_{u \leq g}, K(Tv, ||v-g||)_{g \leq v}, x, y\}$ die Voraussetzungen von (O). Somit existiert $z \in \bigcap_{u \leq g \leq v} [x,y] \cap K(Tu, ||g-u||) \cap K(Tv, ||v-g||)$. Durch $\tilde{T}(x+tg) := Tx + tz$ für $x \in F$, $t \in \mathbb{R}$ wird eine positive, kontraktive, lineare Fortsetzung von T auf G definiert.

Für einen Banachverband E ist (O) zu folgender Eigenschaft (O') äquivalent:

(O'): Sei $\{(u_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, (v_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, w\}$ eine Familie mit $u_\alpha, v_\beta, w \in E_+$ und $r_\alpha, s_\beta \in \mathbb{R}_+$ für alle $\alpha\in A, \beta\in B$, so dass gilt:

$||u_\alpha|| \leqslant r_\alpha$ für alle $\alpha\in A$,

$||v_\beta|| \leqslant s_\beta$ für alle $\beta\in B$,

$||u_\alpha+v_\beta+w|| \leqslant r_\alpha + s_\beta$ für alle $\alpha\in A$, $\beta\in B$.

Dann gibt es $w_1, w_2 \in E_+$, so dass $w = w_1+w_2$ und $||u_\alpha+w_1|| \leqslant r_\alpha$ für alle $\alpha\in A$,

$||v_\beta+w_2|| \leqslant s_\beta$ für alle $\beta\in B$.

(Um das zu beweisen, betrachte man die Relationen:

$u_\alpha = x-x_\alpha$, $v_\beta = y_\beta - y$, $w = y-x$.

(O) $\Longrightarrow$ (O'): Ist $\{(u_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, (v_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, w\}$ gegeben, so erfüllt das durch die obigen Relationen System $\{K(x_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, K(y_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, x, y\}$ mit $x:=o$ die Voraussetzungen von (O). Setze: $w_1 := z-x$ und $w_2 := y-z$.

(O') $\Longrightarrow$ (O): Ist umgekehrt $\{K(x_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, K(y_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, x, y\}$ gegeben, so erfüllt die durch die obigen Relationen definierte Familie $\{(u_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, (v_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, w\}$ die Voraussetzungen von (O'). Man setze $z := x+w_1$.)

5.9 Satz: Jeder AL-Raum hat die Eigenschaft (O).

Beweis: Sei L ein AL-Raum und $\{(u_\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, (v_\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, w\}$

eine Familie, die die Voraussetzungen von (O') erfüllt. Dann gilt:

$||w|| + ||v_\beta|| - s_\beta \leqslant r_\alpha - ||u_\alpha||$ für alle $\alpha \in A$, $\beta \in B$,

$r_\alpha - ||u_\alpha|| \geqslant o$ für alle $\alpha \in A$ und

$||v_\beta|| - s_\beta \leqslant o$ für alle $\beta \in B$. Daher ist

$\sup\{o, ||w|| + ||v_\beta|| - s_\beta\} \leqslant \inf\{||w||, r_\alpha - ||u_\alpha||\}$.

Wähle $t \in \mathbb{R}$ zwischen diesen beiden Zahlen und setze

$w_1 := t\, w/||w||$ und $w_2 := w - w_1$, falls $w \neq o$.

(Für $w=o$ setze $w_1=o$ und $w_2=o$.)

Korollar: Jeder injektive Banachverband hat (O).

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass (O) invariant bzgl. Produktbildung (in BV) ist, und dass die Eigenschaft von einem Banachverband $\tilde{E}$ auf einen Banachunterverband E von $\tilde{E}$ übertragen wird, wenn es eine positive, kontraktive Projektion von $\tilde{E}$ auf E gibt. Die Behauptung folgt nun daraus, dass sich jeder Banachverband als Banachunterverband eines Produktes von AL-Räumen auffassen lässt. (Bemerkung nach 5.4)

5.1o Satz: Sei E ein Banachverband mit (O) (für den Fall: card A = card B = 1). Sei U die Einheitskugel von E und M die Menge der maximalen Elemente von $U_+$. Dann ist M konvex.

Beweis: Sei $u,v \in M$, und $\lambda \in ]o,1[$.

Annahme: $\lambda u + (1-\lambda)v \notin M$. Dann gibt es $w > o$ mit $||\lambda u + (1-\lambda)v + w|| \leqslant 1$. Wegen (O') gibt es $w_1, w_2 \geqslant o$ mit $w_1+w_2 = w$, so dass $||\lambda u + w_1|| \leqslant \lambda$ und $||(1-\lambda)v + w_2|| \leqslant (1-\lambda)$.
Also ist $||u + w_1/\lambda|| \leqslant 1$ und $||v + w_2/(1-\lambda)|| \leqslant 1$.
Daraus folgt wegen der Maximalität von u und v:
$w_1 = w_2 = o$. Widerspruch zu $w > o$.

Korollar 1 : Sei E ein Banachverband mit strikt monotoner Norm. Wenn E die Eigenschaft (O) hat, (für card A = card B = 1), ist E ein AL-Raum.

Beweis: Es ist $M = \{x \in E_+ \mid ||x|| = 1\}$. Da M konvex ist, gilt für alle $x,y > o$:
$(x+y)/(||x||+||y||) = \lambda\, x/||x|| + (1-\lambda)\, y/||y|| \in M$,
wobei $\lambda = ||x||/(||x||+||y||)$. Daraus folgt:
$||x+y|| = ||x|| + ||y||$.

Korollar 2 : Ist E ein injektiver Banachverband mit strikt monotoner Norm, so ist E ein AL-Raum. Insbesondere sind die Räume $E = L^p(\mu)$, $1<p<\infty$, nur dann injektiv, wenn dim E = 1 ist.

Wir haben in 5.8 eine Bedingung für einen Banachverband E gefunden, die die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G mit dim $G < \infty$ zur Folge hat. Das Hauptanliegen dieses Kapitels ist es, zu zeigen, dass schon aus dieser Eigenschaft folgt, dass E injektiv ist, wenn E dual ist.

Wir nennen einen Banachverband F polygonal, wenn es endlich viele Elemente $x_i' \in F_+'$, i=1...n, gibt, so dass $||x|| = \max_i < |x|, x_i' >$ für alle $x \in F$.
Das folgende Lemma zeigt, dass man die Norm eines endlichdimensionalen Banachverbandes F durch eine äquivalente Norm approximieren kann, bzgl. der F polygonal ist.

5.11 Lemma: Sei F ein endlichdimensionaler Banachverband. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x_i' \in F_+'$, i=1...n, so dass $(1-\varepsilon)||x|| \leq \max_i < |x|, x_i' > \leq ||x||$ für alle $x \in F$.

Beweis: Sei U die Einheitskugel von F, und sei $\mathcal{A} := \{A \subset U_+^\circ \mid A \text{ endlich}\}$. $\mathcal{A}$ ist gerichtet bzgl. der Inklusion. Da dim $F < \infty$, ist $K := \{x \in F \mid ||x|| = 1\}$ kompakt. Sei $f_A(x) := \max_{x' \in A} < |x|, x' >$ für alle $x \in K$. Dann ist $\{f_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine gerichtete Teilmenge von C(K) mit $\sup_{A \in \mathcal{A}} f_A(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Nach dem Satz von Dini gibt es zu jedem $\varepsilon > o$ ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $1-\varepsilon \leqslant f_A(x) \leqslant 1$ für alle $x \in K$. Somit ist $(1-\varepsilon) \leqslant \max_{x' \in A} < |x|/||x||, x' > \leqslant 1$ für alle $x \in F$, $x \neq o$.

5.12 Satz: Sei E ein Banachverband mit der (F,G)-
-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G mit
dim $G < \infty$. Dann gilt:
Sind F,G Banachverbände mit $F \leqslant G$ und dim $F < \infty$,
so besitzt jede positive Abbildung $T \in \mathcal{L}(F,E)$
zu jedem $\varepsilon > o$ eine positive Fortsetzung
$\tilde{T} \in \mathcal{L}(G,E)$ (von endlichem Rang) mit
$||\tilde{T}|| \leqslant (1+\varepsilon)||T||$.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{L}(F,E)$ positiv und kontraktiv. Für alle $\varepsilon > o$ gibt es nach 5.11 $x_1', \ldots x_n' \in F_+'$, so dass $(1-\varepsilon)||x|| \leqslant \max_{1 \leq i \leq n} < |x|, x_i' > \leq ||x||$ $(x \in F)$. Durch $||x||_o := \max_{1 \leq i \leq n} < |x|, x_i' >$ wird auf F eine Verbands-norm definiert. Wir bezeichnen F unter dieser Norm mit $F_o$. Sei $\tau : F \longrightarrow F_o$ die Identität. Es gilt $||\tau|| \leqslant 1$ und $||\tau^{-1}|| \leqslant 1/(1-\varepsilon)$.
Sei $\tilde{F}_o := \prod_i (F, x_i')$ und $j: F_o \longrightarrow \tilde{F}_o$ die natürliche Einbettung (siehe Bemerkung nach 5.4). Dann ist $F_o \leqslant \tilde{F}_o$ bzgl. j. Da $\tilde{F}_o$ injektiv ist, gibt es eine positive, lineare Abbildung $S_1: G \longrightarrow \tilde{F}_o$ mit $S_{1|F} = j \circ \tau$ und $||S_1|| \leqslant 1$.

Da $\tilde{F}_o$ endlichdimensional ist, gibt es nach Voraus=
stzung eine positive, lineare Abbildung $S_2$: $\tilde{F}_o \longrightarrow E$
mit $T \circ \tau^{-1} = S_2 \circ j$ und $||S_2|| \leqslant 1/(1-\varepsilon)$.
$\tilde{T} := S_2 \circ S_1$ ist eine positive, lineare Fortsetzung
von T mit $||\tilde{T}|| \leqslant 1/(1-\varepsilon)$.

Zum Beweis des Hauptsatzes dieses Kapitels benö=
tigen wir eine Folgerung von 5.3:
Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband mit
quasiinnerem Punkt. Dann gibt es eine gerichtete
Familie $\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ von endlichdimensionalen Unterver=
bänden von E, so dass $E = \overline{\bigcup_\alpha E_\alpha}$.
(Sei nämlich $u \in E_+$ ein quasiinnerer Punkt von E.
Dann gibt es einen kompakten, stoneschen Raum X,
so dass C(X) zu $E_u$ isomorph ist. Durch den Isomor=
phismus wird ein stetiger Verbandshomomorphismus
$j: C(X) \longrightarrow E$ induziert. Nach 5.3 gibt es eine
gerichtete Familie $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ von endlichdimensio=
nalen Unterverbänden von C(X), so dass $C(X) = \overline{\bigcup_\alpha F_\alpha}$.
Setze $E_\alpha := j(F_\alpha)$. Dann gilt:
$\overline{\bigcup_\alpha E_\alpha} = \overline{j(\bigcup_\alpha F_\alpha)} \supset j(\overline{\bigcup_\alpha F_\alpha}) = \overline{E_u} = E.$)

5.13 Satz: <u>Sei E ein dualer Banachverband. Hat E die
(F,G)-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G
mit $\dim G < \infty$, so ist E injektiv.</u>

Beweis: Nach 1.4 reicht es zu zeigen, dass es für alle Banachverbände G mit $E \leqslant G$ eine positive, kontraktive Projektion von G auf E gibt.

1.Fall: E besitzt einen quasiinneren Punkt. Dann gibt es eine gerichtete Familie $\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ von endlichdimensionalen Unterverbänden von E, so dass $\overline{\bigcup_\alpha E_\alpha} = E$. Wir bezeichnen mit $\tau_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ die natürliche Einbettung für $\alpha \in A$. Da E ein dualer Banachverband ist, gibt es nach 5.12 und 4.5 für alle $\alpha \in A$ eine positive, kontraktive Abbildung $T_\alpha \in \mathcal{L}(G,E)$ mit $T_{\alpha|E_\alpha} = \tau_\alpha$. Da die Einheitskugel von $\mathcal{L}(G,E)$ bzgl. der schwachen $*$-Operatortopologie kompakt ist, gibt es ein Teilnetz von $\{T_\alpha, \alpha \in A\}$, das in dieser Topologie gegen eine Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(G,E)$ konvergiert. $\tilde{T}$ ist positiv und kontraktiv, und es gilt $\tilde{T}_{|E} = 1_E$.

2.Fall: E ist ein beliebiger dualer Banachverband. Für jedes $y > o$ ist $\overline{E_y}$ ein ordnungsvollständiger Banachverband mit quasiinnerem Punkt. Nach Fall 1 gibt es für alle $y > o$ eine positive, kontraktive Abbildung $T_y \in \mathcal{L}(G,E)$, so dass $T_{y|\overline{E_y}}$ die kanonische Einbettung von $\overline{E_y}$ in E ist. Da $\{\overline{E_y}, y > o\}$ eine gerichtete Familie von Unterverbänden von E ist, mit $\overline{\bigcup_{y > o} E_y} = E$, kann man genauso wie in Fall 1 auf die Existenz einer positiven, kontraktiven Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(G,E)$ mit $\tilde{T}_{|E} = 1_E$ schliessen.

Korollar: Ein dualer Banachverband ist genau dann injektiv, wenn er die Eigenschaft (O) hat.

Es soll nun die Frage beantwortet werden, ob der Bidual eines injektiven Banachverbandes auch injektiv ist. Dieses Problem ist schwieriger als das entsprechende in BR, denn die injektiven Banachräume sind genau die ordnungsvollständigen AM-Räume mit Einheit. Deren Bidual ist natürlich wieder ein solcher Raum.

Wir benutzen im Beweis des folgenden Satzes, dass ein endlichdimensionaler Banachverband genau dann polygonal ist, wenn der positive Teil seiner Einheitskugel endlich viele Extremalpunkte besitzt, was nicht schwierig zu zeigen ist.

5.14 Satz: Seien E und F Banachverbände, F endlichdimensional. Dann ist $\mathcal{L}^r(F,E)''$ isomorph zu $\mathcal{L}^r(F,E'')$.

Beweis: Sei dim F = n. Dann ist F zu $\mathbb{R}^n$ isomorph. Sei U die (von F übertragene) Einheitskugel von $\mathbb{R}^n$. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{L}^r(F,E)$ zu $E^n$ isomorph ist, versehen mit der Norm:

$$||(x_1 \ldots x_n)|| = \sup \{ || \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i| ||, (\lambda_i)_i \in U_+ \}.$$

Entsprechend ist $\mathcal{L}^r(F,E'')$ isomorph zu $(E'')^n$ versehen mit der Norm:

$$||(x_1''...x_n'')|| = \sup \{||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i''|||, (\lambda_i)_i \in U_+\}.$$

Sei W die Einheitskugel von $E^n$. Dann ist $(E^n)''$ isomorph zu $(E'')^n$, versehen mit der Einheitskugel $W^{oo}$. (Dabei sind die Polaren bzgl. der Dualität $<E^n,(E')^n>$, mit $<(x_i)_i,(x_i')_i> = \sum_{i=1}^{n} <x_i,x_i'>$ für alle $(x_i)_i \in E^n$, $(x_i')_i \in (E')^n$, bzw. $<(E')^n,(E'')^n>$ genommen.)

1.Fall: F ist polygonal.

Sei $(\lambda_i)_i \in U_+$ fest. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\lambda_i > o$ für i=1...m und $\lambda_i = o$ für $i > m$, $o \leqslant m \leqslant n$.

Sei $W_\lambda := \{(x_i')_i \in E^n | \; ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|| \leqslant 1\}$.

Wie man leicht durch Nachrechnen sieht, ist

$$W_\lambda^o = \{(x_i')_i \in (E')^n | \; x_i' = o \text{ für } i > m \text{ und } ||\bigvee_{i=1}^{m} |x_i'|/\lambda_i|| \leq 1\}$$

Daraus ergibt sich durch Rechnung:

$$W_\lambda^{oo} = \{(x_i'')_i \in (E'')^n | \; ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i''||| \leqslant 1\}$$

Es ist nun:

$W = \bigcap_{\lambda \in U_+} W_\lambda = \bigcap_{\lambda \in Ext(U_+)} W_\lambda$. Da F polygonal ist, ist $Ext(U_+)$ endlich. Also ist

$W^o = \overline{co} \bigcup_{\lambda \in Ext\, U_+} W_\lambda^o = co \bigcup_{\lambda \in Ext\, U_+} W_\lambda^o$. (Die zweite Gleichung gilt, da die konvexe Hülle von endlich vielen kom= pakten Mengen kompakt ist.) Und damit ist

$$W^{oo} = \bigcap_{\lambda \in Ext\, U_+} W_\lambda^{oo} = \bigcap_{\lambda \in U_+} W_\lambda^{oo} =$$

$$\{(x_i'')_i \in (E'')^n | \; ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i''||| \leqslant 1 \text{ für alle } (\lambda_i)_i \in U_+\}.$$

2.Fall: F ist beliebig.

Der Isomorphismus zwischen $(E^n)''$ und $(E'')^n$ induziert einen Verbandshomomorphismus $\phi: \mathcal{L}^r(F,E)'' \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E'')$. Zu zeigen ist, dass $\phi$ isometrisch ist.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Norm $||-||_\varepsilon$ auf F, so dass $F_\varepsilon := (F, ||-||_\varepsilon)$ polygonal ist und $(1-\varepsilon)||x|| \leqslant ||x||_\varepsilon \leqslant ||x||$ für alle $x \in F$ (5.11).

Sei $\tau: F \longrightarrow F_\varepsilon$ die Identität. Wir wollen $\phi$ als Abbildung von $\mathcal{L}^r(F_\varepsilon,E)''$ nach $\mathcal{L}^r(F_\varepsilon,E'')$ mit $\phi_\varepsilon$ bezeichnen. $\phi_\varepsilon$ ist isometrisch nach Fall 1.

Sei $\phi_1: \mathcal{L}^r(F,E) \longrightarrow \mathcal{L}^r(F_\varepsilon,E)$ die Identität, genauer: Es sei $\phi_1(T) := T \circ \tau^{-1}$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(F,E)$.

Ähnlich sei $\phi_2: \mathcal{L}^r(F_\varepsilon,E'') \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E'')$ definiert durch $\phi_2(S) = S \circ \tau$ für alle $S \in \mathcal{L}^r(F_\varepsilon,E'')$.

Dann ist $\phi = \phi_2 \circ \phi_\varepsilon \circ \phi_1''$, also ist $||\phi|| \leqslant 1/(1-\varepsilon)$ und $||\phi^{-1}|| \leqslant 1/(1-\varepsilon)$. Da $\varepsilon$ beliebig war, folgt daraus, dass $\phi$ eine Isometrie ist.

Korollar 1 : Ist E ein Banachverband mit der (F,G)-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G mit $\dim G < \infty$, so ist E'' injektiv.

Beweis: Seien F,G Banachverbände mit $F \leqslant G$ bzgl. $\psi$, und sei $\dim G < \infty$. Nach Voraussetzung ist die

Abbildung $\tilde{\psi}: \mathcal{L}^r(G,E) \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E)$ mit $\tilde{\psi}(T) := T \circ \psi$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(G,E)$ ein strikter metrischer Homomorphismus. Identifiziert man $\mathcal{L}^r(G,E)''$ mit $\mathcal{L}^r(G,E'')$ und $\mathcal{L}^r(F,E)''$ mit $\mathcal{L}^r(F,E'')$, so ist $\tilde{\psi}'': \mathcal{L}^r(G,E'') \longrightarrow \mathcal{L}^r(F,E'')$ die Abbildung, die durch $\tilde{\psi}''(S) := S \circ \psi$ für alle $S \in \mathcal{L}^r(G,E'')$ definiert ist, wie man sich leicht überlegen kann. $\tilde{\psi}''$ ist nach 3.2 ein strikter metrischer Homomorphismus. Also hat E'' die (F,G)-Fortsetzungseigenschaft für alle F,G mit $\dim G < \infty$ und ist somit injektiv nach 5.13.

Korollar 2: Ein Banachverband E ist genau dann injektiv, wenn E die Eigenschaft (P) hat, und E'' injektiv ist.

Korollar 3: Ein Banachverband ist genau dann injektiv, wenn er die Eigenschaften (P) und (O) hat.

Im ersten Kapitel ist gezeigt worden, dass das Produkt injektiver Objekte in einer Kategorie wieder injektiv ist. Man kann in BV noch auf eine andere Art aus injektiven Banachverbänden neue injektive Banachverbände konstruieren:

5.15 Satz: Sind $E_1$, $E_2$ Banachverbände, so dass $E_1'$ und $E_2'$ injektiv sind, so ist auch $\mathcal{L}^r(E_1,E_2')$ injektiv.

Beweis: Seien F,G Banachverbände mit $F \leqslant G$. Da $E_1'$ injektiv ist, gilt (kanonisch) nach 4.5: $F \tilde{\otimes}_\rho E_1 \leqslant G \tilde{\otimes}_\rho E_1$. Daraus folgt: $(F \tilde{\otimes}_\rho E_1) \tilde{\otimes}_\rho E_2 \leqslant (G \tilde{\otimes}_\rho E_1) \tilde{\otimes}_\rho E_2$, da $E_2'$ injektiv ist. Wegen 4.7 Korollar ist also: $F \tilde{\otimes}_\rho (E_1 \tilde{\otimes}_\rho E_2) \leqslant G \tilde{\otimes}_\rho (E_1 \tilde{\otimes}_\rho E_2)$. Damit ist wegen 4.5 gezeigt, dass $\mathcal{L}^r(E_1,E_2') = (E_1 \tilde{\otimes}_\rho E_2)'$ injektiv ist.

Korollar: Sind $E_1$, $E_2$ Banachverbände, $E_1'$ und $E_2$ injektiv, so ist $\mathcal{L}^r(E_1,E_2)$ injektiv.

Beweis: Nach 5.5 ist $\mathcal{L}^r(E_1,E_2'')$ injektiv.
Sei $\tilde{Q}_{E_2}: \mathcal{L}^r(E_1,E_2) \longrightarrow \mathcal{L}^r(E_1,E_2'')$ die Abbildung, die durch $\tilde{Q}_{E_2}(T) := Q_{E_2} \circ T$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(E_1,E_2)$ definiert ist. $\tilde{Q}_{E_2}$ ist positiv und kontraktiv.
Da $E_2$ injektiv ist, gibt es eine positive, kontraktive Projektion $P: E_2'' \longrightarrow E_2$.
Sei $\tilde{P}: \mathcal{L}^r(E_1,E_2'') \longrightarrow \mathcal{L}^r(E_1,E_2)$ die Abbildung, die durch $\tilde{P}(T) := P \circ T$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(E_1,E_2'')$ definiert ist. $\tilde{P}$ ist positiv und kontraktiv, und es gilt $\tilde{P} \circ \tilde{Q}_{E_2} = 1_{\mathcal{L}^r(E_1,E_2)}$. Aus 1.3 folgt dann, dass $\mathcal{L}^r(E_1,E_2)$ injektiv ist.

Beispiele:

1. Sei M ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit und L ein AL-Raum. Dann sind die Räume $\mathcal{L}^r(M,M)$ und $\mathcal{L}^r(L,L)$ injektiv, nach dem vorange= henden Korollar. Aus demselben Korollar folgt auch, dass $\mathcal{L}^r(M,L)$ und $\mathcal{L}^r(L,M)$ injektiv sind. Das ist jedoch direkt einsichtig, da $\mathcal{L}^r(M,L)$ ein AL-Raum und $\mathcal{L}^r(L,M)$ ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit ist.

2. Sei E ein Banachverband. Wir bezeichnen mit $\ell^1_s(E)$ den Vektorverband der Folgen in E, deren Betrag schwach summierbar ist. D.h. eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann in $\ell^1_s(E)$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} < |x_n|, x' > < \infty$ für alle $x' \in E'$.

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert nach dem Prinzip der gleich= mässigen Beschränktheit

$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_s := \sup \{||\sum_{n=1}^{m} |x_n|||,\ m\in\mathbb{N}\}$.

$||-||_s$ ist eine Norm auf $\ell^1_s(E)$, bzgl. der $\ell^1_s(E)$ ein Banachverband ist.

Es gilt: $\ell^1_s(E) \tilde{=} \mathcal{L}^r(c_o,E)$

(Jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_s(E)$ definiert nämlich eine Abbil= dung $T \in \mathcal{L}^r(c_o,E)$ durch: $T(\lambda_n)_n := \sum_n \lambda_n x_n$ für alle $(\lambda_n)_n \in c_o$. Die Summe existiert für alle $(\lambda_n)_n \in c_o$, denn für $m,p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$||\sum_{n=m}^{m+p} \lambda_n x_n|| \leq \sup_{n\geq m} |\lambda_n| \cdot ||\sum_{n=m}^{m+p} |x_n|||$$
$$\leq \sup_{n\geq m} |\lambda_n| \cdot ||(x_n)_n||_s.$$

Es gilt $|T|((\lambda_n)_n) = \sum_n \lambda_n |x_n|$ für alle $(\lambda_n)_n \in c_o$.

Sei U die Einheitskugel von $c_o$. Dann ist

$$||T||_r = \sup \{||\sum \lambda_n |x_n|||, (\lambda_n)_n \in U_+\}$$
$$= \sup \{||\sum_{n=1}^{m} \lambda_n |x_n|||, (\lambda_n)_n \in U_+, m \in \mathbb{N}\}$$
$$= \sup \{||\sum_{n=1}^{m} |x_n|||, m \in \mathbb{N}\} = ||(x_n)_n||_s.$$

Sei umgekehrt $T \in \mathscr{L}^r(c_o, E)$. Wir definieren $x_n := Te_n$, wobei $e_n$ den n-ten Einheitsvektor in $c_o$ bezeichnet. Dann ist $T((\lambda_n)_n) = \sum_n \lambda_n x_n$ für alle $(\lambda_n)_n \in c_o$ und es ist $||T||_r = ||(x_n)_n||_s$.)

Das Korollar zu 5.15 ergibt nun:

Ist E ein injektiver Banachverband, so ist auch $\ell^1_s(E)$ injektiv.

Setzt man E:= C(X), X kompakt und stonesch, so ist für jede Folge $(f_n)_n \in \ell^1_s(C(X))$:

$$||(f_n)_n||_s = \sup \{\sum_n |f_n(s)| \mid s \in X\}.$$

Der Raum der summierbaren Folgen in C(X), $\ell^1(C(X))$, ist jedoch nicht injektiv, wenn dim $C(X) = \infty$.

(Denn $F := \ell^1(C(X))$ ist ein echtes Ideal in $E := \ell^1_s(C(X))$, aber es gilt $F^{\perp\perp} = E$. Wäre F injektiv, so gäbe es eine positive, kontraktive Projektion von E auf F. Damit hätte F die Eigenschaft $(P_1)$. Daraus folgt aber $F^{\perp\perp} = F$. Widerspruch.)

3. Sei E ein Banachverband. Wir bezeichnen mit $\ell^1_b(E)$ den Vektorverband der Folgen in E, deren Betrag summierbar ist. $\ell^1_b(E)$ ist ein Banachverband unter der Norm: $||(x_n)_n||_b := ||\sum_n |x_n|||$.

Es gilt: Hat E die Eigenschaft (O), so hat sie auch $\ell^1_b(E)$, d.h. $\ell^1_b(E)''$ ist injektiv.

Zum Beweis benutzen wir folgende Verallgemeinerung der Dekompositionseigenschaft, die man leicht durch Induktion beweist:

Sei E ein Banachverband, und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ summierbare Folgen in E mit $x_n \leqslant y_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Ist $z\in[\sum x_n, \sum y_n]$, so gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $z_n\in[x_n,y_n]$ mit $\sum z_n = z$.

Sei $\{K(\underline{x}^\alpha, r_\alpha)_{\alpha\in A}, K(\underline{y}^\beta, s_\beta)_{\beta\in B}, \underline{x}, \underline{y}\}$ eine Familie in $\ell^1_b(E)$, die den Voraussetzungen von (O) genügt. Dann gilt:

$||\underline{x}-\underline{x}^\alpha||_b = ||\sum_n (x_n - x_n^\alpha)|| \leqslant r_\alpha$ für alle $\alpha\in A$,

$||\underline{y}^\beta-\underline{y}||_b = ||\sum_n (y_n^\beta - y_n)|| \leqslant s_\beta$ für alle $\beta\in B$,

$||\underline{y}-\underline{x}||_b = ||\sum_n (y_n - x_n)|| \leqslant r_\alpha + s_\beta$ für alle $\alpha\in A, \beta\in B$,

und es ist $\sum_n x_n^\alpha \leqslant \sum_n x_n \leqslant \sum_n y_n \leqslant \sum_n y_n^\beta$. Da (O) in E gültig ist, gibt es $z\in[\sum x_n, \sum y_n]$ mit $||z-\sum_n x_n^\alpha|| \leqslant r_\alpha$ für alle $\alpha\in A$ und $||\sum_n y_n^\beta - z|| \leqslant s_\beta$ für alle $\beta\in B$. Nach der obigen Bemerkung gibt es $\underline{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_b(E)$ mit $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $z = \sum z_n$. Dann ist $\underline{z}\in \bigcap_{\alpha,\beta}([\underline{x},\underline{y}]\cap K(\underline{x}^\alpha, r_\alpha) \cap K(\underline{y}^\beta, s_\beta))$.

Der Raum $\ell^1_b(E)$ ist jedoch im allgemeinen nicht injektiv, auch wenn E es ist. Ein Gegenbeispiel ist in 2. gegeben, da für einen kompakten Raum X die Banachverbände $\ell^1_b(C(X))$ und $\ell^1(C(X))$ übereinstimmen.

# L i t e r a t u r

Banach, Stefan: Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

Cartwright, Donald Ian: Extension of positive operators between Banach lattices. Erscheint demnächst in Memoirs of the AMS.

Day, Mahlon M.: Normed linear spaces, Berlin 1958.

Dixmier, J.: Sur certains espaces considerés par M. H. Stone, Summa Bras. Math. 2 (1951), 151-182.

Goodner, Dwight B.: Projections in normed linear spaces, Trans. AMS 69 (195o) 89-1o8.

Grothendieck, Alexandre: Une caractérisation vecto= rielle-métrique des espaces $L^1$, Canad. J. Math. 7 (1955) 552-561.

Kaufmann, R.: A type of extension of Banach spaces, Acta Sci. Math. (Szeged) 27 (1966) 89-1o8.

Kelley, John L.: Banach spaces with the extension property, Trans. AMS 72 (1952), 323-326.

Köthe, Gottfried: Fortsetzung linearer Abbildungen lokalkonvexer Räume, Jahresbericht der DMV 68 (1966), 193-2o4.

Lindenstrauss, Joram: Extension of compact operators, Memoirs AMS 48 (1964), 1-112.

Lotz, Heinrich P.: (1) Minimal and reflexive Banach lattices, Math. Ann. 2o9 (1974) 117-126

(2) Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices. Erscheint demnächst in Trans. AMS.

Nachbin, Leopoldo: On the Hahn-Banach theorem, An. Acad. Brasil. Ci. 21 (1949), 151-154

Schaefer, H.H.: (1) Topological vector spaces, Berlin-Heidelberg- New York 1971.

(2) Banach lattices and positive operators, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

Schlotterbeck, Ulf: Habilitationsschrift (1974), Universität Tübingen.

Semadini, Zbigniew: Banach spaces of continous functions, volume I, Warszawa 1971.

Silverman, R.J., Yen, Ti: The Hahn-Banach theorem and the least upper bound property, Trans. AMS 9o (1959) 523-526.