Semesterbericht Funktionalanalysis

Wintersemester 81/82

AG FUNKTIONAL-ANALYSIS

tübingen

Ordnungsisomorphismen und vollständige Isomorphie-Invarianten lokal kompakter Gruppen

von

Wolfgang Arendt

Eine wichtige Methode zur Erforschung eines mathematischen Gegenstandes besteht darin, vollständige Isomorphie-Invarianten für ihn anzugeben. Ich will am Beispiel der lokal kompakten Gruppen, von denen der vorliegende Aufsatz sprechen wird, erläutern, was ich darunter verstehe. Eine <u>Isomorphie-Invariante</u> besteht aus einer Klasse $\mathfrak{O}$ von Objekten zusammen mit einem Isomorphismusbegriff und einer Zuordnung X, die jeder lokal kompakten Gruppe G ein Objekt X(G) aus $\mathfrak{O}$ zuordnet, derart daß $X(G_1)$ isomorph zu $X(G_2)$ ist, wenn G_1 und G_2 isomorph sind. Ich spreche von einer <u>vollständigen</u> Isomorphie-Invarianten, falls auch umgekehrt die Isomorphie von $X(G_1)$ und $X(G_2)$ zur Folge hat, daß G_1 und G_2 isomorph sind.
Ein vollkommenes Beispiel einer vollständigen Isomorphie-Invarianten für lokal kompakte abelsche Gruppen liefert die Dualitätstheorie von Pontryagin. Bei dem Versuch jedoch,

diese Theorie auf nicht abelsche Gruppen zu erweitern, stößt man auf Schwierigkeiten. Zwar existiert eine natürliche Verallgemeinerung der dualen Gruppe, nämlich die Menge aller irreduziblen unitären Darstellungen, aber es scheint keine Struktur auf dieser Menge bekannt zu sein, die sie zu einer vollständigen Isomorphieinvarianten macht.

Auf der anderen Seite kann man jeder lokal kompakten Gruppe auf kanonische Weise verschiedene Algebren zuordnen: die Gruppenalgebra $L^1(G)$, die Maßalgebra $M(G)$, die Fourier Algebra $A(G)$ und die Fourier-Stieltjes Algebra $B(G)$. Es stellt sich die Frage, bzgl. welcher Strukturen diese Räume vollständige Isomorphieinvarianten bilden. Bislang schenkten die meisten Autoren der Banach Algebra Struktur ihre Aufmerksamkeit. Jedoch tragen alle diese Räume auch eine natürliche Ordnungsstruktur, und J. De Cannière und ich untersuchten vor kurzem, inwieweit diese die Gruppe eindeutig bestimmen (siehe [2] und [3]). Im ersten Teil des Artikels werde ich diese Ergebnisse zusammen mit einem kurzen historischen Abriß darstellen. Im zweiten Teil werden dann einige neue Ergebnisse für abelsche Gruppen gezeigt. So werden im Abschnitt 3 die duale Gruppe und die Fourier Transformation ordnungstheoretisch gekennzeichnet. Im 4. Abschnitt wird gezeigt, daß $L^2(G)$ - aufgefaßt als ein bigeordneter Raum - eine vollständige Isomorphie-Invariante ist.

1. Vollständige Isomorphie-Invarianten für lokal-kompakte Gruppen.

Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Mit M(G) bezeichne ich den Raum aller beschränkten regulären Borelmaße auf G. M(G) ist eine involutive Banachalgebra mit der Faltung als Multiplikation und der Involution

$$(1.1) \qquad \langle f, \mu^* \rangle := \overline{\langle \tilde{f}, \mu \rangle} \qquad (f \in C_c(G)).$$

Hierbei identifiziere man M(G) mit dem Dualraum von $C_c(G)$, dem Raum aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger, versehen mit der Supremumsnorm, und definiere

$$(1.2) \qquad \tilde{f}(t) = \overline{f(t^{-1})} \qquad (t \in G)$$

falls f eine komplexwertige Funktion auf G ist.

Es sei ein linksinvariantes Haarmaß auf G festgelegt, und bzgl. diesem bildet man wie üblich die Räume $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$. $L^1(G)$ läßt sich mit dem abgeschlossenen Teilraum aller absolut stetigen Maße in M(G) identifizieren. Bzgl. der Faltung als Multiplikation und der von M(G) induzierten Involution ist $L^1(G)$ eine involutive Banachalgebra und ein algebraisches Ideal in M(G).

Bezüglich der üblichen Definition der Positivität eines Maßes ist M(G) eine geordneter Banachraum (sogar ein Banachverband), dessen positiven Kegel ich mit $M(G)_+$ bezeichne. Der induzierte Kegel $L^1(G)_+ := M(G)_+ \cap L^1(G)$ in $L^1(G)$ besteht aus allen Funktionen in $L^1(G)$, die fast überall positiv sind. Ich will von der entsprechenden Ordnungsrelation auf $L^1(G)$ und M(G) als der

<u>punktweisen Ordnung</u> sprechen.

Eine andere Ordnung wird durch die Struktur einer involutiven Banachalgebra definiert, d.h. durch den positiven Kegel

$$M(G)_p := \overline{co}\{\mu^* * \mu \quad ; \mu \in M(G)\} \qquad \text{bzw.}$$

$$L^1(G)_p := \overline{co}\{f^* * f \quad ; f \in L^1(G)\}.$$

Ich will diese die <u>positiv-definite Ordnung</u> nennen.

Die Menge der stetigen positiv-definiten Funktionen auf G sei mit P(G) bezeichnet. P(G) ist der duale Kegel von $L^1(G)_p$ in $L^\infty(G) = (L^1(G))'$ [5, 13.4.5]. Betrachtet man die einhüllende C^*-Algebra $C^*(G)$ von $L^1(G)$, so lassen sich also auch die positiven Funktionale auf $C^*(G)$ mit P(G) identifizieren. Unter dieser Identifikation ergibt sich somit

(1.3) $\quad C^*(G)' = \operatorname{span} P(G) := B(G)$

Dabei bezeichnet span P(G) die lineare Hülle von P(G) in $C^b(G)$, dem Raum aller komplexwertigen, stetigen, beschränkten Funktionen auf G. Da $P(G) \cdot P(G) \subset P(G)$ ist, ist B(G) eine Unteralgebra von $C^b(G)$, und man kann beweisen, daß die Dualnorm $\| \ \|$ von $C^*(G)$ auf B(G) eine Banachalgebranorm ist [6]. Die Banachalgebra B(G) heißt die <u>Fourier-Stieltjes Algebra von</u> G.

Ist G abelsch, so ist nach dem Satz von Bochner

$$B(G) = \{\hat{\mu} \, ; \, \mu \in M(\hat{G})\},$$

wobei $\hat{G}$ die duale Gruppe von G und $\hat{\mu}$ die Fourier-Stieltjes Transformation von μ bezeichnet. Die Fourier-Stieltjes Transformation $\wedge : M(\hat{G}) \longrightarrow B(G)$ ist ein isometrischer Banachalgebra-Isomorphismus.

Die Fourier Algebra $A(G)$ ist als Abschluß von $B(G) \cap C_c(G)$ in $B(G)$ definiert. Somit ist also $A(G)$ ein abgeschlossenes algebraisches Ideal in $B(G)$. Ist G abelsch, so ist

$$A(G) = \{ \hat{f}; \quad f \in L^1(\hat{G}) \},$$

und die Fourier Transformation $\wedge : L^1(\hat{G}) \longrightarrow A(G)$ ist ein isometrischer Banachalgebra-Isomorphismus.

Als Referenz für alle Ergebnisse, die die Fourier- und Fourier-Stieltjes Algebra einer (nicht notwendig kommutativen) Gruppe betreffen, sei der grundlegende Artikel [6] von P. Eymard genannt.

$B(G)$ und $A(G)$ tragen ebenfalls zwei verschiedene Ordnungsstrukturen. Die <u>punktweise Ordnung</u> sei durch den Kegel

$$B(G)_+ := \{u \in B(G); \; u(t) \geqslant o \text{ für alle } t \in G\},$$

$$\text{bzw.} \quad A(G)_+ := B(G)_+ \cap A(G)$$

definiert, die <u>positiv-definite Ordnung</u> durch den Kegel

$$B(G)_p := P(G), \qquad \text{bzw.}$$

$$A(G)_p := A(G) \cap P(G).$$

Es sind nun vier Vektorräume

$$\{ X(G); \quad X = M, L^1, A, B \}$$

definiert worden. In jedem der vier Fälle ist $X(G)$ eine Banachalgebra und ein geordneter Vektorraum bzgl. zwei verschiedener Kegel $X(G)_+$ und $X(G)_p$.

Seien nun G_1 und G_2 lokal kompakte Gruppen. Eine lineare Abbildung $T: X(G_1) \longrightarrow X(G_2)$ heiße <u>positiv für die punktweise</u>

(bzw. positiv-definite) Ordnung, wenn $TX(G_1)_+ \subset X(G_2)_+$ (bzw. $TX(G_1)_p \subset X(G_2)_p$). T heiße Ordnungsisomorphismus für die punktweise (bzw. positiv-definite) Ordnung, falls T bijektiv ist und $TX(G_1)_+ = X(G_2)_+$ und $TX(G_1)_p = X(G_2)_p$.

Ist $\alpha : G_2 \to G_1$ ein topologischer Gruppen-Isomorphismus, so sei $V_\alpha : X(G_1) \to X(G_2)$ durch $V_\alpha f = f \circ \alpha$ $(f \in X(G_1))$ im Fall $X = L^1, A, B$ und $\langle g, V_\alpha \mu \rangle = \langle g \circ \alpha^{-1}, \mu \rangle$ $(\mu \in M(G_1),\ g \in C_c(G_2))$ im Fall $X = M$ definiert.
Es ist offensichtlich, daß V_α ein isometrischer Algebra-Isomorphismus und ein Ordnungs-Isomorphismus für die punktweise und die positiv-definite Ordnung ist. Damit ist also gezeigt, daß $X(G)$ bzgl. aller oben genannten Strukturen eine Isomorphie-Invariante ist.

Um nun über vollständige Invarianz zu sprechen, nehme man an, es existiere eine bijektive, lineare Abbildung $T : X(G_1) \to X(G_2)$. Den oben definierten Strukturen entsprechend kann man die folgenden Forderungen an T betrachten:

(1) T ist ein Algebra-Isomorphismus (Abk.: Alg)

(2) T ist eine Isometrie (Abk.: Iso)

(3) T ist ein Ordnungs-Isomorphismus für die punktweise Ordnung (Abk.: Pkt)

(4) T ist ein Ordnungs-Isomorphismus für die positiv-definite Ordnung (Abk.: Pd)

Das Problem der vollständigen Invarianz kann man dann folgendermaßen formulieren: Welche dieser Forderungen an T implizieren die Isomorphie von G_1 und G_2?

In der Literatur interessierte man sich überwiegen für die erste Bedingung, nämlich daß T ein Algebra-Isomorphismus ist, und zwar zunächst einmal im Fall der Gruppenalgebra ($X = L^1$). Es ist jedoch leicht einzusehen, daß Bedingung (1) sicherlich nicht ohne weitere einschränkende Voraussetzungen an die Gruppen hinreichend für die Isomorphie von G_1 und G_2 ist:

Man betrachte z.B. zwei endliche abelsche Gruppen H_1 und H_2, die gleiche Mächtigkeit haben aber nicht isomorph sind.
Dann ist $A(H_i)$ als Banachalgebra isomorph zu $C^b(H_i)$ ($i = 1,2$).
Sei $\alpha : H_2 \longrightarrow H_1$ eine beliebige bijektive Abbildung.
Dann wird durch $f \mapsto f \circ \alpha$ $(f \in A(H_1))$ ein Algebra-Isomorphismus von $A(H_1)$ auf $A(H_2)$ definiert. Durch Transformation erhält man einen Algebra-Isomorphismus zwischen $L^1(\hat{H}_1)$ und $L^1(\hat{H}_2)$. Jedoch sind $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$ nicht isomorph.
Setzt man jedoch voraus, daß G_1 und G_2 abelsch sind und $\hat{G}_1$ oder $\hat{G}_2$ zusammenhängend ist, so bewiesen Beurling und Helson 1953 [4], daß G_1 und G_2 isomorph sind, falls T ein Algebra-Isomorphismus ist.

Betrachtet man beliebige Gruppen, so muß man zu (1) eine weitere Bedingung hinzunehmen. Das erste Ergebnis in dieser Richtung wurde von Kawada 1948 erzielt: Die Forderungen (1) und (3) sind im Falle $X = L^1$ hinreichend für die Isomorphie von G_1 und G_2. 1951 zeigte Wendel [14], daß man die Ordnungsbedingung (3) durch die Normbedingung (2) ersetzen kann. Dieses letzte Ergebnis wurde 1964 von B.E. Johnson [7] auf die Maßalgebra übertragen.
Diese Ergebnisse für $X = L^1$ und M liefern im abelschen Fall duale Resultate für X = A und B. Für beliebige Gruppen zeigte

Walter 1972 [14], daß im Fall $X = A$ und B die Bedingungen (1) und (2) für die Isomorphie der Gruppen hinreichend sind. Damit sind also die Wendelschen Bedingungen (1) und (2) in allen vier Fällen $X = L^1$, M, A, B hinreichend.

In [2] und [3] wurde dann gezeigt, daß die Normbedingung (2) durch eine Ordnungsbedingung ersetzt werden kann, und zwar sind im Fall $X = L^1$, M (1) und (3) und im Fall $X = A, B$ (1) und (4) hinreichend. Für $X = L^1$ ist das der Satz von Kawada [9], das wohl älteste Resultat in diesem Themenkreis, während das Ergebnis für $X = M$, A und B bisher unbekannt gewesen zu sein scheint. Sind die Gruppen abelsch, so sind die Fälle $X = L^1$ (bzw. M) und $X = A$ (bzw. B) dual zueinander. Dabei beachte man, daß die Fourier-(Stieltjes-) Transformation ein Algebra- und Ordnungsisomorphismus von $(L^1(G), L^1(G)_+)$ (bzw. $(M(G), M(G)_+)$ auf $(A(G), A(G)_p)$ (bzw. $(B(G), P(G))$) ist. Somit entspricht Bedingung (3) für $X = L^1$, M der Bedingung (4) für $X = A,B$.

Das Hauptergebnis in [2] und [3] besagt, daß schließlich auch die Bedingung (1) durch eine Ordnungsbedingung ersetzt werden kann. Es gilt genauer:

<u>Theorem</u> 1.1 Sei $X = A$, B oder L^1 und $T : X(G_1) \rightarrow X(G_2)$ ein Ordnungsisomorphismus für die punktweise und die positiv-definite Ordnung. Dann gibt es einen topologischen Gruppen-Isomorphismus $\alpha : G_2 \rightarrow G_1$ und eine Konstante $c > o$, so daß entweder $Tf(t) = c \cdot f(\alpha(t))$ $(t \in G_2,\ f \in X(G_1))$ oder $Tf(t) = c \cdot h(t)\ f(\alpha(t^{-1}))$ $(t \in G_2,\ f \in X(G_1))$ wobei $h(t) \equiv 1$ im Fall $X = A,B$ und $h = \Delta^{-1}$ im Fall $X = L^1$.

Dabei bezeichnet Δ die Modularfunktion auf G_2.

Von besonderem Interesse scheint dieser Satz für X = B zu sein. Der "bigeordnete Vektorraum" $(B(G), B(G)_+, P(G))$ ist nämlich eine (nach Theorem 1.1) vollständige Isomorphie-Invariante, die sehr einfach zu definieren ist. Die lokale Kompaktheit der Gruppe und das Haarmaß sind für die Definition nicht notwendig. (Allerdings geht das Haarmaß stark in die Beweise ein).

Die nachfolgende Tafel stellt schematisch die oben geschilderten Ergebnisse dar. Was die klassischen Sätze von Kawada und Wendel angeht, so werden sie hier nicht in ihrer stärksten Fassung wiedergegeben. Tatsächlich lassen sich die Bedingung der Bijektivität (des Algebrahomomorphismus von $L^1(G_1)$ nach $L^1(G_2)$) und die Normbedingung (2) abschwächen, und eine Reihe von weiteren Arbeiten beschäftigt sich damit. Auch wurden in der Literatur andere Räume wie z.B. $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ oder $C_c(G)$ betrachtet. Es sei hier auf die Literaturhinweise in [1o] Seite 1o, 11 und 89 verwiesen. In Abschnitt 4 dieses Aufsatzes wird $L^2(G)$ betrachtet.

Folgt aus der Existenz einer linearen, bijektiven Abbildung $T : X(G_1) \longrightarrow X(G_2)$ mit den Eigenschaften E, daß G_1 und G_2 isomorphe topologische Gruppen sind?

E	X = A	X = B		E	$X = L^1$	X = M
Alg	ja, wenn G_1, G_2 abelsch & G_1 oder G_2 zsh.	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & G_1 oder G_2 zsh.		Alg	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & $\hat{G}_1$ oder $\hat{G}_2$ zsh. [4] 1953	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & $\hat{G}_1$ oder $\hat{G}_2$ zsh
Pkt	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & G_1 oder G_2 zsh.	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & G_1 oder G_2 zsh.		Pd	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & $\hat{G}_1$ oder $\hat{G}_2$ zsh.	ja, wenn G_1,G_2 abelsch & $\hat{G}_1$ oder $\hat{G}_2$ zsh
Alg & Iso	ja Walter [14] 1972	ja Walter [14] 1972		Alg & Iso	ja Wendel [15] 1951	ja Johnson [7] 1964
Alg & Pd	ja [2, 3.2]	ja [3, 3.2]		Alg & Pkt	ja Kawada [9] 1948	ja [3,3.3]
Pkt & Pd	ja [2,4.3]	ja [3, 5.3]		Pd & Pkt	ja [3, 6.2]	?
Pkt & Iso	ja, wenn G_1,G_2 amenabel	ja [3, 5.4]		Pd & Iso	?	?

Erläuterungen zur vorangehenden Tafel.

E = Alg. Unter Beachtung von [12; 4.6.4] folgt der Fall $X = M$ aus dem Fall $X = L^1$. Die Fälle $X = A, B$ ergeben sich durch Dualtität.

E = Pkt, X = A Seien G_1, G_2 abelsch. Sei $T : A(G_1) \rightarrow A(G_2)$ ein Ordnungsisomorphismus für die punktweise Ordnung. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\alpha : G_2 \rightarrow G_1$ und eine Abbildung $h: G_2 \rightarrow (o,\infty)$, so daß $Tf = h \cdot f \circ \alpha$ für alle $f \in A(G_1)$ [2, 4.2]. Aus der Bemerkung nach [3, 5.1] ergibt sich, daß $Vf = f \circ \alpha$ einen Algebra-Isomorphismus von $A(G_1)$ auf $A(G_2)$ definiert. Damit folgt die Behauptung aus dem Fall E = Alg, X = A.

E = Pkt, X = B Dieser Fall folgt mit [3, 5.3] und [12, 4.6.4] aus dem Fall E = Hom, X = A.

E = Pd, $X = L^1$ Dieser Fall ist dual zu E = Pkt, X = A (siehe 3.2).

E = Pd, X = M Natürlich erhält man eine zu E = Alg, X = B duale Aussage. Diese entspricht aber nicht den hier gemachten Voraussetzungen. Tatsächlich ist nämlich die die Fourier-Stieltjes Transformation kein Ordnungsisomorphismus von $((M(G), M(G)_p)$ auf $(B(G), B(G)_+)$, wenn G abelsch und nicht diskret ist. Trotzdem läßt sich obige Antwort geben. Für die dazu notwendigen Betrachtungen muß jedoch auf eine andere Arbeit verwiesen werden.

E = Pkt & Pd, X = B In B(G) gibt es noch einen weiteren Kegel $B(G)_{\oplus} := \overline{co} \left\{ u \cdot \bar{u} \; ; \; u \in B(G) \right\} \subset B(G)_+$. I.a. gilt jedoch $B(G)_{\oplus} \neq B(G)_{+}$ (cf. E = Pd , X = M). Man kann jedoch zeigen, daß Ordnungsisomorphismen bzgl. dieser Ordnung auch Ordnungsisomorphismen bzgl. der punktweisen Ordnung sind.

E = Pkt & Iso, X = A Diesen Fall führt man leicht mit Hilfe der Bemerkung nach 5.1 in [3] auf den Fall E = Alg & Iso, X = A zurück.

2. Eine Charakterisierung der Kommutativität von G

Von besonderem Interesse sind Invarianten, wenn sie Eigenschaften der Gruppe wiedergeben. Im folgenden wird die Kommutativität von G durch Eigenschaften der positiv-definiten Ordnung in A(G) und B(G) characterisiert.

2.1 Satz. Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) G ist abelsch

(ii) $(A(G), A(G) \cap P(G))$ ist ein Verband

(iii) $(B(G), P(G))$ ist ein Verband

Beweis. Ist G abelsch, so ist die Fourier-(Stieltjes-) Transformation ein Ordnungsisomorphismus von $(L^1(\hat{G}), L^1(\hat{G})_+)$ (bzw. $(M(\hat{G}), M(\hat{G})_+)$ auf $(A(G), A(G) \cap P(G))$ (bzw. $(B(G), P(G))$. Daraus ergibt sich (ii) und (iii).

Umgekehrt gelte (ii). Bezeichne die linksreguläre Darstellung mit $\lambda : G \to \mathcal{L}(L^2(G))$. Der Dualraum von A(G) läßt sich mit der von $\{\lambda_t; t \in G\}$ erzeugten von Neumann Algebra

VN(G) identifizieren. Dabei entspricht der duale Kegel von $A(G) \cap P(G)$ dem positiven Kegel der C^*-Algebra VN(G). Aus (ii) folgt also, daß VN(G) eine verbandsgeordnete C^*-Algebra ist. Daher muß VN(G) kommutativ sein, wie wohlbekannt ist. Insbesondere ist $\lambda_{st} = \lambda_s\lambda_t = \lambda_t\lambda_s = \lambda_{ts}$ und somit $st = ts$ für alle $s,t \in G$. G ist also kommutativ.
Ein ähnliches Argument liefert die Implikation "(iii) $\Rightarrow$ (i)".

Korollar 2.2. Seien G_1, G_2 lokal kompakte Gruppen. Sei X = A oder X = B. Es existiere ein Ordnungsisomorphismus für die positiv-definite Ordnung von $X(G_1)$ auf $X(G_2)$. Dann gilt:
G_1 ist genau dann abelsch, wenn G_2 es ist.

Der geordnete Vektorraum $(X(G), X(G)_p)$ (X = A oder B) ist eine Isomorphieinvariante für die Gruppe G, aber sie ist nicht vollständig. (Das kann man folgendermaßen sehen: Seien G_1 und G_2 endliche, kommutative Gruppen, die nicht isomorph sind aber gleiche Mächtigkeit haben. Dann sind $(X(G_1), X(G_1)_p)$ und $(X(G_2), X(G_2)_p)$ Banachverbände von der gleichen Dimension. Daher sind sie isomorph [13, II 3.9 Corollary 1].) Bemerkenswert ist, daß die Invariante $(X(G), X(G)_p)$ dennoch bzgl. der Eigenschaft der Kommutativität vollständig ist (was gerade das Korollar besagt).

3. Duale Gruppen

Satz 3.1 Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe mit dualer Gruppe $\hat{G}$ und $\mathcal{F}: L^1(G) \to A(\hat{G})$ die Fourier Transformation. Es gilt:

(3.1) $$\mathcal{F} L^1(G)_+ = A(\hat{G})_p$$

(3.2) $$\mathcal{F} L^1(G)_p = A(\hat{G})_+$$

Beweis. (3.1) folgt unmittelbar aus dem Satz von Bochner. Da $\mathcal{F}(f * f^*) = |\mathcal{F}f|^2$ $(f \in L^1(G))$ und $\mathcal{F}$ stetig ist, gilt $\mathcal{F} L^1(G)_p \subset A(\hat{G})_+$. Das ist eine Inklusion in (3.2). Da die Fourier Transformation bijektiv und P(G) der duale Kegel von $L^1(G)_p$ ist, reicht es wegen des Bipolarensatzes zum Nachweis der anderen Inklusion in (3.2) zu zeigen, daß gilt:

(3.3) Sei $\varphi \in A(\hat{G})'$ derart daß $\mathcal{F}'\varphi \in P(G)$. Dann ist $\langle u,\varphi\rangle \geq 0$ für alle $u \in A(\hat{G})_+$.

Nach dem Satz von Bochner existiert $\mu \in M(\hat{G})_+$, so daß $\mathcal{F}'\varphi = \hat{\mu}$. Sei $u \in A(\hat{G})_+$. Dann existiert $f \in L^1(G)$, so daß $u = \mathcal{F}f$. Somit erhält man mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}'\varphi\rangle = \int_G f(t)\,\hat{\mu}(t)\,dt = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\gamma)\,d\mu(\gamma)$$

$$= \int_{\hat{G}} u(\gamma)\,d\mu(\gamma) \geq 0.$$ Es gilt also (3.3).

Der folgende Satz zeigt, daß die in Satz 3.1 genannten Eigenschaften die duale Gruppe und die Fourier Transformation bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen.

<u>Theorem</u> 3.2. Seien G_1 und G_2 lokal kompakte Gruppen und $F : L^1(G_1) \to A(G_2)$ eine bijektive, lineare Abbildung, so daß

(3.4) $\quad F(L^1(G_1)_+) = A(G_2)_p$ und

(3.5) $\quad F(L^1(G_1)_p) = A(G_2)_+$.

Dann sind G_1 und G_2 abelsche Gruppen, und es gibt einen topologischen Gruppen-Iomorphismus $\alpha : G_2 \to \widehat{G}_1$ und eine Konstante $c > o$, so daß

(3.6) $\quad Ff(t) = c\, \hat{f}(\alpha(t)) \qquad (t \in G_2, f \in L^1(G_1))$,

wobei $\hat{f}$ die Fourier Transformierte von $f \in L^1(G_1)$ bezeichnet.

<u>Beweis</u>. Da $L^1(G_1)$ bzgl. der punktweisen Ordnung ein Verband ist, folgt aus (3.4), daß $A(G_2)$ bzgl. der positiv-definiten Ordnung ein Verband ist. Also ist G_2 abelsch nach Satz 2.1. Sei $\mathcal{F}_2 : L^1(\widehat{G}_2) \to A(G_2)$ die Fourier Transformation. Aus 3.1 und der Voraussetzung folgt, daß $F^{-1} \circ \mathcal{F}_2$ ein Ordnungsisomorphismus für die punktweise und die positiv-definite Ordnung ist. Daher sind G_1 und $\widehat{G}_2$ isomorph nach 1.1 $(X = L^1)$. Also ist G_1 ebenfalls abelsch. Bezeichne $\mathcal{F}_1 : L^1(G_1) \to A(\widehat{G}_1)$ die Fourier Transformation. Aus 3.1 und den Voraussetzungen folgt, daß auch $F \circ \mathcal{F}_1^{-1} : A(\widehat{G}_1) \to A(G_2)$ ein Ordnungsisomorphismus für beide Ordnungen ist. Also existiert nach 1.1 $(X = A)$ ein topologischer Gruppen-Isomorphismus $\alpha : G_2 \to \widehat{G}_1$ und eine Konstante $c > o$, so daß $(F \circ \mathcal{F}_1^{-1})u = c \cdot u \circ \alpha$ $(u \in A(\widehat{G}_1))$. Somit gilt für $f \in L^1(G_1)$:
$Ff = F\, \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1^{-1} f = c \cdot \mathcal{F}_1 f \circ \alpha$, was zu beweisen war.

4. $L^2(G)$ als vollständige Invariante einer lokal kompakten abelschen Gruppe

Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe mit dualer Gruppe $\hat{G}$, und sei $\mathfrak{F} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ die Fourier-Plancherel Transformation. Mit $L^2(G)_+$ sei der Kegel der fast überall positiven Funktionen in $L^2(G)$ bezeichnet, und mit $L^2(G)_p$ der Kegel $L^2(G)_p := \mathfrak{F}^{-1}L^2(\hat{G})_+$.

Der folgende Satz zeigt, daß der "bigeordnete Raum" $(L^2(G), L^2(G)_+, L^2(G)_p)$ eine vollständige Isomorphie-Invariante ist. Dieses Ergebnis für $L^2(G)$ hat insofern besonderes Interesse, als man hier die Ordnungsstruktur <u>nicht</u> durch die metrische und algebraische Struktur ersetzen kann. Tatsächlich wurde zwar nachgewiesen, daß in $L^p(G)$ für $p \neq 2$ Norm und Faltung die Gruppe eindeutig bestimmen [11], aber für p = 2 ist dies falsch: Es gibt zwei nicht-isomorphe kompakte abelsche Gruppen G_1 und G_2, so daß ein isometrischer Algebra-Isomorphismus von $L^2(G_1)$ auf $L^2(G_2)$ existiert (siehe [8]).

<u>Theorem</u> 4.1. Seien G_1 und G_2 lokal kompakte abelsche Gruppen und $T : L^2(G_1) \to L^2(G_2)$ eine bijektive, lineare Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $T(L^2(G_1)_+) = L^2(G_2)_+$ und $T(L^2(G_1)_p) = L^2(G_2)_p$

(ii) Es existiert ein topologischer Gruppen-Isomorphismus $\alpha : G_2 \to G_1$ und eine Konstante $c > 0$, so daß gilt:

(4.1) $\qquad Tf = c \cdot f \circ \alpha \qquad (f \in L^2(G_1))$.

Bemerkung 4.2. Der analoge Satz für $L^1(G)$ ist in [2] bewiesen worden. Der Beweis hier wird über [3, 3.2] (also den Fall E = Alg & Pd, X = B) geführt.

Es soll folgende Notation vereinbart werden: Sind H_1, H_2 lokal kompakte abelsche Gruppen, so bezeichne $\mathcal{F}_i : L^2(H_i) \to L^2(\hat{H}_i)$ die Fourier-Plancherel Transformation. Sei $S : L^2(H_1) \to L^2(H_2)$ eine lineare Abbildung. Dann bezeichne $\hat{S}$ die konjugierte Abbildung $\hat{S} = \mathcal{F}_2 S \mathcal{F}_1^{-1}$: $L^2(\hat{H}_1) \to L^2(\hat{H}_2)$. Positivität soll sich immer auf den Kegel $L^2(H_i)_+$ $(i = 1,2)$ beziehen. S heißt also positiv $(S \geqslant 0)$, wenn $S(L^2(H_1)_+) \subset L^2(H_2)_+$. S heißt Verbandsisomorphismus, falls S bijektiv ist, und $S \geqslant o$ und $S^{-1} \geqslant o$. Mit diesen Bezeichnungen ist (i) zu folgender Aussage äquivalent:

(i)' T und $\hat{T}$ sind Verbandsisomorphismen.

Beweis von 4.1. Nehmen wir an, daß (ii) gilt. Dann ist T offensichtlich ein Verbandsisomorphismus. Es bleibt zu zeigen, daß auch $\hat{T}$ ein Verbandsisomorphismus ist. Aus der Eindeutigkeit des Haarmaßes folgt, daß eine Funktion f auf G_1 genau dann in $L^1(G_1)$ liegt, wenn $f \circ \alpha \in L^1(G_2)$ und

(4.1) $\qquad \int_{G_2} f(\alpha(t))\, dt = d \int_{G_1} f(s)\, ds \qquad (f \in L^1(G_1))$

für eine Konstante $d > o$. Über Pontryagin-Dualität erhält man einen topologischen Gruppen-Isomorphismus $\beta : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ derart daß

$$(4.2) \qquad (\alpha^{-1}(s), \gamma) = (s, \beta(\gamma)) \qquad (s \in G_1,\ \gamma \in \hat{G}_2).$$

Sei nun $f \in L^1(G_1) \cap L^2(G_1)$ und $\mathcal{F}_1 f \geqslant o$. Dann gilt für alle $\gamma \in \hat{G}_2$:

$$(\hat{T}\,\mathcal{F}_1 f)(\gamma) = (\mathcal{F}_2\ Tf)(\gamma) = c \int_{G_2} \overline{(t, \gamma)}\ f(\alpha(t))dt \overset{(4.1)}{=}$$

$$c \cdot d \int_{G_1} \overline{(\alpha^{-1}(s), \gamma)}\ f(s)\ ds \overset{(4.2)}{=} cd \int_{G_1} \overline{(s, \beta(\gamma))}\ f(s)\ ds$$

$$= c\ d\ \mathcal{F}_1 f(\beta(\gamma)) \geqslant o.$$

Damit ist gezeigt, daß $\hat{T}(L^2(\hat{G}_1)_+ \cap \mathcal{F}_1(L^1(G_1))) \subset L^2(\hat{G}_2)_+$. Da $L^2(\hat{G}_1)_+ \cap \mathcal{F}_1(L^1(G_1))$ dicht in $L^2(\hat{G}_1)_+$ und $\hat{T}$ stetig ist, folgt daß $\hat{T}$ positiv ist. Ersetzt man T durch T^{-1}, so erhält man, daß auch $\hat{T}^{-1}$ positiv ist. Somit ist gezeigt, daß $\hat{T}$ ein Verbandsisomorphismus ist.

Um nun die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, daß T und $\hat{T}$ Verbandsisomorphismen sind.

Ist $q \in L^\infty(G_i)$, so bezeichne $M_q \in \mathcal{L}(L^2(G_i))$ den Multiplikationsoperator, der durch $M_q f = q \cdot f \quad (f \in L^2(G_i))$ definiert ist $(i = 1,2)$. Da T ein Verbandsisomorphismus ist, gibt es einen Algebra-Isomorphismus $V : L^\infty(G_1) \to L^\infty(G_2)$ derart daß

$$(4.3) \qquad T M_q T^{-1} = M_{Vq} \qquad (q \in L^\infty(G_1))$$

[1, 3.8 und 3.5.2]. Aus (4.3) ergibt sich durch Konjugation mit der Fourier-Plancherel Transformation

$$(4.4) \qquad \hat{T}\ \widehat{M_q}\ \hat{T}^{-1} = \widehat{M_{Vq}} \qquad (q \in L^\infty(G_1)).$$

Es sei für $i = 1,2$ $\lambda^i : \hat{G}_i \longrightarrow (L^2(\hat{G}_i))$ die links-reguläre Darstellung, d.h. es ist $(\lambda^i_\gamma f)(\eta) = f(\gamma^{-1}\eta)$ $(\gamma, \eta \in \hat{G}_i,\ f \in L^2(\hat{G}_i))$.

Ist $M : L^2(G_i) \rightarrow L^2(G_i)$ eine lineare Abbildung, so ist

(4.5) $M = M_q$ für ein $q \in L^\infty(G_i)$ genau dann, wenn

$$\hat{M}\lambda^i_\gamma = \lambda^i_\gamma \hat{M} \quad \text{für alle } \gamma \in \hat{G}_i$$

[1o, 4.1.1]; und falls $M = M_q$ für ein $q \in L^\infty(G_i)$), so ergibt sich aus (4.5), [1o, 3.6.1] und dem Satz von Bochner, daß

(4.6) $\hat{M}_q \geqslant o$ genau dann, wenn $q \in P(G_i)$

(i = 1,2). Nach Voraussetzung ist $\hat{T}$ ein Verbandsisomorphismus. Daher folgt aus (4.4) und (4.6), daß $VP(G_1) = P(G_2)$. Somit ist also auch $VB(G_1) = B(G_2)$, und es folgt aus [3, 3.2], daß ein topologischer Gruppenisomorphismus $\alpha : G_2 \rightarrow G_1$ existiert, derart daß $Vq = q \circ \alpha$ für alle $q \in B(G_1)$. Damit ergibt (4.3)

(4.7) $$T\, M_q\, T^{-1} = M_{q\circ\alpha} \qquad (q \in B(G_1)).$$

Definiere nun $U : L^2(G_1) \longrightarrow L^2(G_2)$ durch $Uf = f \circ \alpha$ $(f \in L^2(G_1))$ und betrachte die Abbildung $S := U^{-1}T :$ $L^2(G_1) \rightarrow L^2(G_1)$. Sei $q \in B(G_1)$. Dann ist wegen (4.7):
$SM_q = U^{-1}TM_q = U^{-1}TM_qT^{-1}T = U^{-1}M_{q\circ\alpha}\,T = M_qU^{-1}T = M_qS.$
Insbesondere gilt also

(4.8) $$SM_\gamma = M_\gamma S \qquad (\gamma \in \hat{G}_1)$$

Für $\gamma \in \hat{G}_1$ ist aber $\hat{M}_\gamma = \lambda^1_\gamma$. Somit ist (4.8) gleichbedeutend mit

(4.9) $$\hat{S}\lambda^1_\gamma = \lambda^1_\gamma \hat{S} \qquad (\gamma \in \hat{G}_1).$$

Aus (4.5) folgt, daß es ein $q \in L^{\infty}(G_1)$ gibt, so daß $S = M_q$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\hat{U}$ ein Verbandsisomorphismus, also auch $\hat{S} = \hat{U}^{-1}\hat{T}$. Daher folgt aus (4.6), daß $q \in P(G_1)$ und $1/q \in P(G_1)$. [3, 4.5] zeigt, daß dies nur sein kann, wenn $q = c \cdot \gamma_o$ für ein $\gamma_o \in \hat{G}_1$ und eine Konstante $c > o$. Also ist $S = c\, M_{\gamma_o}$. Da aber S positiv ist, folgt $\gamma_o = 1$. Also ist $S = cI$, d.h. $T = cU$. Das war zu zeigen.

Literatur

1 W. Arendt: Spectral properties of Lamperti operators. Erscheint im Indiana Univ. Math. J. 1983

2 W. Arendt; J. De Cannière: Order Isomorphisms of Fourier algebras. Preprint 1981

3 W. Arendt; J. De Cannière: Order Isomorphisms of Fourier-Stieltjes Algebras. Preprint 1982

4 A. Beurling; H. Helson: Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers. Math. Scand. 1, 12o-126 (1953).

5 J. Dixmier: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars. Paris 1969

6 P. Eymard: L'algèbre de Fourier d'un goupe localement compact. Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 181-236

7 B.E. Johnson: Isometric isomorphisms of measure algebras. Proc. AMS 15 (1964) 186-188

8 G.I. Gaudry: Doctoral Dissertation. Canberra, Australia 1955

9 Y. Kawada: On the group ring of a topological group. Math. Japon 1 (1948) 1-5

1o R. Larsen: An Introduction to the Theory of Multipliers. Springer 1971

11 S.K. Parrot: Isometric multipliers. Pac. J. Math. 25 (1968) 159-166

12 W. Rudin: Fourier Analysis on Groups. Interscience Publishers. New York 1967

13 H.H. Schaefer: Banach Lattices and Positive Operators. Springer 1974

14 M. Walter: W^*-algebras and nonabelian harmonic analysis. J. Functional Anal. 11 (1972) 17-38

15 J.G. Wendel: On isometric isomorphisms of group algebras. Pac. J. Math. 1 (1951) 305-311

Wolfgang Arendt
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
7400 Tübingen