Math. Nachr. 131 (1987) 7—18

Ideale regulärer Operatoren und Kompaktheit positiver Operatoren zwischen Banachverbänden

Von WOLFGANG ARENDT in Tübingen und HANS-ULRICH SCHWARZ in Leipzig

(Eingegangen am 17. 7. 1985)

Die Menge $\mathcal{K}(E, F)$ aller kompakten Operatoren zwischen zwei BANACH-Räumen E und F ist im Raum $\mathcal{L}(E, F)$ aller stetigen Operatoren für gewisse Folgenräume ausgezeichnet.

1. Wenn $E = c_0$ oder l_p ist $(1 \leqq p < \infty)$, dann ist $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E)$ das einzige nicht-triviale abgeschlossene Ideal in der BANACH-Algebra $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

2. Es gilt $\mathcal{K}(l_p, l_q) = \mathcal{L}(l_p, l_q)$ für $1 \leqq q < p < \infty$ und $\mathcal{K}(c_0, l_q) = \mathcal{L}(c_0, l_q)$ für $1 \leqq q < \infty$.

Ziel dieser Arbeit ist es, ordnungstheoretische Varianten für diese Phänomene zu geben.

Sind E und F BANACH-Verbände, so bezeichnet $\mathcal{L}^r(E, F)$ den Raum aller *regulären Operatoren* von E nach F — das sind diejenigen Operatoren, die sich als Differenz linearer positiver Operatoren darstellen lassen. Unter der *regulären Norm*

$$\|T\|_r := \inf \{\|T_1 + T_2\| : T = T_1 - T_2;\, T_1, T_2 \geqq 0\} = \inf \{\|U\| : \pm T \leqq U\}$$

wird $\mathcal{L}^r(E, F)$ ein geordneter BANACH-Raum; $\mathcal{L}^r(E)$ ist eine BANACH-Algebra (siehe SCHAEFER [13, Ch. IV] oder SCHWARZ [14, Ch. III]). Ist F ordnungsvollständig, so ist $\mathcal{L}^r(E, F)$ ein BANACH-Verband und $\|T\|_r = \||T|\|$. Mit $\mathcal{K}^r(E, F)$ bezeichnen wir den Abschluß der endlichdimensionalen Operatoren in $\mathcal{L}^r(E, F)$. Es zeigt sich, daß $\mathcal{K}^r(E, F)$ für beliebige BANACH-Verbände F ein BANACH-Verband ist ([14, III.4.13]).

Ein linearer Teilraum $\mathcal{J}$ von $\mathcal{L}^r(E, F)$ heißt *Ordnungsideal*, wenn er positiv erzeugt ist und aus $\pm T \leqq U \in \mathcal{J}$ stets $T \in \mathcal{J}$ folgt. Wenn $\mathcal{L}^r(E, F)$ ein Verband ist, dann sind Ordnungs-Ideale genau die Verbandsideale.

Die oben zuerst genannte Eigenschaft überträgt sich folgendermaßen: Falls $E = c_0$ oder l_p ist $(1 \leqq p < \infty)$, dann ist $\mathcal{K}^r(E)$ das einzige nicht-triviale, abgeschlossene, algebraische und Ordnungs-Ideal in $\mathcal{L}^r(E)$. Dieses Ergebnis verallgemeinert ein Resultat von ARENDT und SOUROUR [3].

Was die zweite Eigenschaft anbetrifft, so erhält man ganz analog $\mathcal{K}^r(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ für die oben angegebenen Fälle. Daneben existieren jedoch noch weitere Paare (E, F) von BANACH-Verbänden mit dieser Eigenschaft, für die aber $\mathcal{K}(E, F) \neq \mathcal{L}(E, F)$ ist.

Ferner lassen sich durch die Gleichheit von $\mathcal{K}^r(E, F)$ und $\mathcal{L}^r(E, F)$ BANACH-Verbände E (oder F) charakterisieren, wenn man für den anderen Partner F (bzw. E) nur gewisse Typen zuläßt. Diese Gleichheit tritt in allen von uns betrachteten Fällen genau dann ein, wenn jeder positive Operator von E nach F kompakt ist. So zeigen wir u. a. folgendes: Ein BANACH-Verband F ist genau dann ein KB-Raum, wenn $\mathcal{K}^r(c_0, F) = \mathcal{L}^r(c_0, F)$ oder jeder positive Operator von c_0 nach F kompakt ist; F ist genau dann ein atomarer KB-Raum, wenn für alle AM-Räume M stets $\mathcal{K}^r(M, F) = \mathcal{L}^r(M, F)$ oder jeder positive Operator von M nach F kompakt ist; F ist genau dann ordnungsstetig und atomar, wenn für alle kompakten HAUSDORFF-Räume K stets $\mathcal{K}^r(C(K), F) = \mathcal{L}^r(C(K), F)$ oder jeder kompakte Operator von $C(K)$ nach F kompakt ist.

Die vorliegende Arbeit entstand, als einer der Autoren (W. ARENDT) Gast am Naturwissenschaftlich-Theoretischen Zentrum der Karl-Marx-Universität in Leipzig war. Für die Gastfreundschaft sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

1. Der Raum $\mathcal{K}^r(E, F)$

Ein positives Element e eines BANACH-Verbandes E ist ein *Atom*, wenn das erzeugte Hauptideal E_e eindimensional ist. In diesem Fall ist E_e sogar ein Projektionsband. Ein BANACH-Verband wird *atomar* genannt, wenn er eine Teilmenge $B = \{e_\alpha : \alpha \in \mathsf{A}\}$ von Atomen besitzt, so daß $E = B^{\perp\perp}$ ist. Die Räume $l_p(\mathsf{A})$ und $c_0(\mathsf{A})$ sind für $1 \leqq p \leqq \infty$ und beliebige Indexmengen A atomar; die Einheitsvektoren $e_\beta = (\delta_{\beta\alpha})_{\alpha\in\mathsf{A}}$ bilden ein maximales disjunktes System von Atomen. Ein BANACH-Verband E heißt *ordnungsstetig*, wenn jede nach unten gerichtete Familie (x_τ), für die $\inf x_\tau = 0$ ist, gegen Null konvergiert. Die Räume $c_0(\mathsf{A})$ und $l_p(\mathsf{A})$ sind für $1 \leqq p < \infty$ ordnungsstetig. Es läßt sich zeigen, daß jeder ordnungsstetige atomare BANACH-Verband zu einem Ideal E_0 in $c_0(\mathsf{A})$ (als Vektorverband) isomorph ist, das $l_1(\mathsf{A})$ enthält. Die Einbettungen $l_1(\mathsf{A}) \subset E_0$ $E_0 \subset c_0(\mathsf{A})$ sind stetig, A ist dabei eine geeignete (nicht notwendig abzählbare) Indexmenge.

Wir geben zunächst einige Charakterisierungen von atomaren ordnungsstetigen BANACH-Verbänden (siehe dazu auch [15] und [16]).

Satz 1.1. *Für einen* BANACH-*Verband E sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) *E ist ordnungsstetig und atomar.*

(ii) *Es gibt eine Familie endlichdimensionaler Bandprojektionen, die stark gegen die Identität konvergiert.*

(iii) *Jedes Ordnungsintervall ist kompakt.*

Beweis. (i) impliziert (ii). Es sei $B = \{e_\alpha : \alpha \in \mathsf{A}\}$ eine Menge von disjunkten Atomen, so daß $B^{\perp\perp} = E$ ist, ferner sei P_a die Bandprojektion auf das Band $\{e_\alpha : \alpha \in a\}^{\perp\perp} = \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in a\}$, wobei $a \subset \mathsf{A}$ eine endliche Teilmenge ist. Es ist klar, daß $(P_a x)_a$ für jedes $x \in E_+$ nach oben gerichtet und $\sup P_a x = x$ gilt, wobei a alle endlichen Teilmengen von A durchläuft. Da E ordnungsstetig ist, folgt $\lim P_a x = x$ für $x \in E_+$ und somit (ii).

(ii) impliziert (iii). Es sei $[-u, u]$ ein Ordnungsintervall in E. Da für eine Familie (P_α) von Bandprojektionen gemäß (ii) und $x \in [-u, u]$ stets $|x - P_\alpha x| \leqq (I - P_\alpha)\, u$ gilt, konvergieren die Einschränkungen von P_α auf $[-u, u]$ gleichmäßig gegen die Identität. Folglich ist $[-u, u]$ relativ kompakt. Da Ordnungsintervalle abgeschlossen sind, folgt (iii).

(iii) impliziert (i). Ein BANACH-Verband ist ordnungsstetig, wenn alle Ordnungsintervalle schwach kompakt sind. Es bleibt nachzuweisen, daß E atomar ist. Wenn $B = \{e_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ ein maximales System von Atomen ist, dann liefert die Bandzerlegung $E = E_0 \oplus B^{\perp\perp}$ mit $E_0 := B^\perp$ ein Band in E ohne Atome. Falls $E_0 \neq \{0\}$ ist, gibt es ein Element $0 < u \in E_0$, und der Abschluß E_1 des von u erzeugten Hauptideals ist ein ordnungsstetiger BANACH-Verband mit einer schwachen Ordnungseinheit. Nach [10, 1.b.14] kann man E_1 identifizieren mit einem Ideal in $L_1(\Omega, \mu)$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, μ), so daß

$$L_\infty(\Omega, \mu) \subset E_1 \subset L_1(\Omega, \mu) \quad \text{und} \quad \|x\|_1 \leqq \|x\| \leqq 2\,\|x\|_\infty$$

gilt. Das Ideal $L_\infty(\Omega, \mu)$ kann keine Atome besitzen, folglich ist auch der Maßraum (Ω, μ) atomlos. Daher kann man jede meßbare Menge in zwei gleichgroße disjunkte Mengen zerlegen (vgl. [6, § 41 (2)]). Diese Eigenschaft erlaubt die Konstruktion von RADEMACHER-Funktionen r_n in $L_\infty(\Omega, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, die den Abstand $\|r_n - r_m\| \geqq \|r_n - r_m\|_1 = 1$ für $n \neq m$ haben. Andererseits liegen sie in einem Ordnungsintervall von E_1, das nach Voraussetzung kompakt ist. Widerspruch. Also ist $E_0 = \{0\}$, d. h. $E = B^{\perp\perp}$ ist atomlos. $\#$

Bemerkung. Durch die koordinatenweise Ordnung in einem BANACH-Raum mit einer unbedingten Basis wird dieser zu einem separablen BANACH-Verband. Auf diese Weise erhält man genau die separablen, atomaren und ordnungsstetigen BANACH-Verbände.

Wenn M ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit ist, dann gilt $\mathcal{L}(E, M) = \mathcal{L}^r(E, M)$ isometrisch für alle BANACH-Verbände E. Mit Hilfe von Satz 1.1 kann man diese Isometrie auch für beliebige AM-Räume beweisen, sofern E atomar und ordnungsstetig ist.

Korollar 1.2. *Wenn E atomar und ordnungsstetig ist und M ein AM-Raum, dann gilt $\mathcal{L}(E, M) = \mathcal{L}^r(E, M)$ und $\|T\| = \|T\|_r$ für $T \in \mathcal{L}(E, M)$.*

Beweis. Für $x \in E_+$ ist $[-x, x]$ nach dem obigen Satz kompakt — und somit auch $T[-x, x]$. Dann existiert $\sup T[-x, x]$ ([14, II.9.23]) und definiert $|T|\,x$. Außerdem ist $J_M\,|T| = |J_M T|$ ([14, II.9.24]), wobei $J_M : M \to M''$ die kanonische Einbettung ist. Damit erhält man für die Norm $\|T\| = \|J_M T\| = \|\,|J_M T|\,\| = \|\,|T|\,\| = \|T\|_r$. $\#$

Es gilt also insbesondere

$$\mathcal{L}(c_0, c_0) = \mathcal{L}^r(c_0, c_0), \qquad \mathcal{L}(c_0, c) = \mathcal{L}^r(c_0, c);$$
$$\mathcal{L}(l_p, c_0) = \mathcal{L}^r(l_p, c_0), \qquad \mathcal{L}(l_p, c) = \mathcal{L}^r(l_p, c), \qquad 1 \leqq p < \infty,$$

und alle Räume sind BANACH-Verbände (dabei bezeichnet c den BANACH-Verband aller konvergenten Folgen). Nach XIONG [18] hat man auch $\mathcal{L}(c, c) = \mathcal{L}^r(c, c)$, aber dieser Raum ist kein Verband (siehe Beispiel 2(g) dieser Arbeit).

Im folgenden Satz charakterisieren wir den Raum $\mathcal{K}^r(E, F)$ für den Fall, daß F ordnungsstetig und atomar ist.

Satz 1.3. *Wenn F ein ordnungsstetiger und atomarer* BANACH-*Verband ist, dann sind für $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) $T \in \mathcal{K}^r(E, F)$.

(ii) $|T| \in \mathcal{K}(E, F)$.

(iii) $|T| \leqq U$ *für ein* $U \in \mathcal{K}(E, F)$.

Beweis. (i) impliziert (ii). Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß $\mathcal{K}^r(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$ ist. Ferner ist $\mathcal{K}^r(E, F)$ ein Teilverband von $\mathcal{L}^r(E, F)$, also hat man (ii).

Aus (ii) folgt trivialerweise (iii).

(iii) impliziert (i). Es sei $|T| \leqq U \in \mathcal{K}(E, F)$ und (P_α) eine Familie endlichdimensionaler Bandprojektionen in F gemäß Satz 1.1. Dann gilt $(I - P_\alpha) x \to 0$ für alle $x \in UB_E$, wobei B_E die Einheitskugel von E ist. Da UB_E relativ kompakt ist, ist die Konvergenz gleichmäßig in $x \in UB_E$, d. h. $\|(I - P_\alpha) U\| \to 0$. Wegen $|(I - P_\alpha) T| \leqq (I - P_\alpha) |T| \leqq (I - P_\alpha) U$ erhält man $\|T - P_\alpha T\|_r \leqq \|(I - P_\alpha) U\| \to 0$ und somit $T \in \mathcal{K}^r(E, F)$. #

Dieser Satz zeigt insbesondere, daß für spezielle F der Teilverband $\mathcal{K}^r(E, F)$ sogar ein Ideal in $\mathcal{L}^r(E, F)$ ist. Das ist i. allg. nicht der Fall, selbst wenn F atomar und ordnungsvollständig ist, denn die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind nicht umkehrbar. Man betrachte etwa $T(\xi_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n$ mit $y_n = (1, 1, \ldots, 1, -1, 1, 1, \ldots)$ als Operator von l_1 nach l_∞. Offenbar ist T nicht kompakt (folglich $T \notin \mathcal{K}^r$), während $|T| = e \oplus e$ sogar eindimensional ist. Ferner ist die Einbettung $l_1 \hookrightarrow l_\infty$ positiv und nicht kompakt, wird aber von $e \oplus e$ majorisiert.

Dodds und Fremlin [5] zeigten, daß aus $\pm T \leqq U \in \mathcal{K}(E, F)$ stets $T \in \mathcal{K}$ folgt, sofern E' und F ordnungsstetig sind. Satz 1.3 liefert nun eine ähnliche Aussage, in der nur an einen der Räume Forderungen gestellt werden (siehe auch [16] für einen anderen Beweis).

Korollar 1.4. *Wenn E' oder F ordnungsstetig und atomar ist, dann folgt aus $\pm T \leqq U \in \mathcal{K}(E, F)$ stets $T \in \mathcal{K}(E, F)$.* #

2. Ideale in $\mathcal{L}^r(E)$

Calkin zeigte schon 1940, daß die kompakten Operatoren für l_2 das einzige nicht-triviale abgeschlossene Ideal in $\mathcal{L}(l_2)$ bilden. Gochberg, Markus und Feldman konnten 1960 diesen Sachverhalt auch für die Folgenräume l_p $(1 \leqq p < \infty)$ und c_0 beweisen (vgl. Pietsch [10, 5.1]). Weitere Räume mit dieser Eigenschaft sind nicht bekannt. Untersucht man die Struktur der Banach-Algebra $\mathcal{L}^r(E)$, so stellt man zunächst fest, daß selbst in $\mathcal{L}^r(l_p)$ für $1 < p < \infty$ mehrere nicht-triviale abgeschlossene Ideale existieren. Um dies zu sehen, betrachten wir neben $\mathcal{K}^r(l_p)$ das abgeschlossene Ideal

$$\mathcal{K}_0(l_p) := \mathcal{K}(l_p) \cap \mathcal{L}^r(l_p).$$

Offenbar gilt $\mathcal{K}^r(l_p) \subset \mathcal{K}_0(l_p) \subset \mathcal{L}^r(l_p)$, wobei die zweite Inklusion echt ist, da die Identität von l_p nicht zu $\mathcal{K}_0(l_p)$ gehört. Um auch $\mathcal{K}^r(l_p) \neq \mathcal{K}_0(l_p)$ zu belegen, konstruieren wir einen regulären, kompakten Operator, in l_p, dessen Betrag nicht kompakt ist. Dazu nehmen wir $2 \leqq p < \infty$ an, der Fall $1 < p \leqq 2$ verläuft analog. Die $2^k \times 2^k$-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & A_k \\ A_k & -A_k \end{pmatrix}$$

haben in $l_2^{2^k}$ die Norm $\|A_k\|_2 = 2^{k/2}$ (vgl. [13, IV. § 1] oder [14.II.1]) und in $l_\infty^{2^k}$ die Norm $\|A_k\|_\infty = 2^k$. Aus dem Rieszschen Interpolationssatz ergibt sich die Norm $\|A_k\|_p \leqq 2^{k/p'}$

in $l_p^{2^k}$, wobei $1/p + 1/p' = 1$ ist (tatsächlich gilt sogar Gleichheit). Da $|A_k| = e \oplus e$ eindimensional ist, gilt $\| |A_k| \|_p = 2^k$ für alle $2 \leqq p < \infty$. Durch $T := (2^{-k} A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wird auf $l_p(l_p^{2^k}) = l_p$ ein kompakter Operator definiert, dessen Betrag $|T| = (2^{-k} |A_k|)_k$ aber nicht kompakt ist.

Da auf l_1 und c_0 die reguläre Norm mit der Operatorennorm zusammenfällt (Korollar 1.4), bleibt das Ergebnis von Gochberg, Markus und Feldman für $\mathcal{L}^r(l_1) = \mathcal{L}(l_1)$ und $\mathcal{L}^r(c_0) = \mathcal{L}(c_0)$ richtig.

Das oben konstruierte Beispiel zeigt, daß für die eindeutige Charakterisierung des Ideals $\mathcal{K}^r(E)$ noch Zusatzbedingungen notwendig sind. Es ist sinnvoll, nach Idealen zu suchen, die gleichzeitig Ordnungs-Ideale in $\mathcal{L}^r(E)$ sind, oder — und das ist die Minimalforderung, die die Ordnungsstruktur in irgendeiner Weise respektiert — man betrachtet Ideale, die gleichzeitig Unterverbände von $\mathcal{L}^r(E)$ sind. Zumindest für die Räume l_p $(1 < p < \infty)$ reicht die letzte Bedingung aus. Eine Inspektion des Beweises von Arendt und Sourour [3] zeigt, daß $\mathcal{L}^r(l_p)$ nur ein nicht-triviales, abgeschlossenes, algebraisches und Ordnungs-Ideal enthält. Der nächste Satz liefert mit anderen Mitteln eine Abschwächung der Voraussetzung.

Satz 2.1. *Jedes nicht-triviale Ideal in $\mathcal{L}^r(l_p)$, $1 < p < \infty$, das ein Unterverband ist, ist in $\mathcal{K}^r(l_p)$ enthalten.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis man wörtlich aus dem Buch von Pietsch [10, 5.1.1] übernehmen kann. Die zusätzliche Eigenschaft der Regularität der auftretenden Operatoren B und X ergibt sich leicht aus deren Konstruktion.

Lemma 2.2. *Wenn E und F jeweils einer der Räume l_p $(1 \leqq p < \infty)$ oder c_0 sind und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein nicht-kompakter Operator, dann gibt es reguläre Operatoren $X \in \mathcal{L}^r(E)$ und $B \in \mathcal{L}^r(F)$, so daß $BTXe_n = e_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist.* #

Beweis von Satz 2.1. Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^r(E)$ ein Ideal und Unterverband, und es sei $T \in \mathcal{J}$ ein Operator, der nicht in $\mathcal{K}^r(E)$ liegt. Dann gilt auch $|T| \in \mathcal{J}$ und $|T| \notin \mathcal{K}(E)$ nach Satz 1.3. Nun liefert das Lemma reguläre Operatoren X und B auf E, so daß $X\,|T|\,B = I$ ist. Das bedeutet aber, daß die Identität I zu $\mathcal{J}$ gehört, d. h. $\mathcal{J} = \mathcal{L}^r(E)$. #

Als einfache Folgerung ergibt sich nun das folgende Theorem. Um hier und auch im weiteren die Bezeichnungen zu vereinfachen, vereinbaren wir, daß wir unter einem *Ideal* in $\mathcal{L}^r(E)$ stets ein nicht-triviales abgeschlossenes (algebraisches) Ideal verstehen.

Theorem 2.3. *Für $1 < p < \infty$ ist $\mathcal{K}^r(l_p)$ das einzige Ideal in $\mathcal{L}^r(l_p)$, das auch ein Unterverband ist.*

Beweis. Ein Ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^r(l_p)$ enthält alle endlichdimensionalen Operatoren (vgl. [3]). Folglich ist $\mathcal{K}^r(l_p)$ das kleinste Ideal in $\mathcal{L}^r(l_p)$ und Satz 2.1 liefert die Behauptung. #

Die Aussage von Theorem 2.3 bleibt nicht richtig, wenn man auf eine der Voraussetzungen verzichtet. Das zeigen die nächsten Beispiele. Dabei untersuchen wir auch die Idealstruktur über anderen Räumen.

(a) Wie das eingangs konstruierte Beispiel zeigt, ist die Forderung nach der Verbandsstruktur wesentlich.

(b) Es gibt nicht-triviale abgeschlossene Verbandsideale in $\mathcal{L}^r(l_p)$, die verschieden von $\mathcal{K}^r(l_p)$ sind. Man nehme etwa das Zentrum $\mathcal{Z}(l_p)$, das sogar ein Band (aber kein algebraisches Ideal) ist.

(c) Theorem 2.3 gilt nicht mehr für nicht-atomare L_p-Räume. Für $E = L_p(R)$, $1 \leqq p < \infty$, bildet das Band $\mathcal{A}_p = (E' \oplus E)^{\perp\perp}$ der regulären Kernoperatoren ein Ideal in $\mathcal{L}^r(E)$ mit $\mathcal{K}^r(E) \subset \mathcal{A}_p \subset \mathcal{L}^r(E)$, siehe [13, IV § 9]. Die Inklusionen sind echt, da z. B. die Faltung mit einer L_1-Funktion ($\neq 0$) einen nicht-kompakten Kernoperator definiert (AKEMANN [1]) und die Identität auf E kein Kernoperator ist.

(d) Theorem 2.3 gilt nicht für $E = l_\infty$. In $\mathcal{L}^r(l_\infty) = \mathcal{L}(l_\infty)$ ist

$$\mathcal{K}^s(l_\infty) := \{T \in \mathcal{L}(l_\infty) \colon |T| \leqq U \quad \text{für ein} \quad U \in \mathcal{K}(l_\infty)\}$$

ein von $\mathcal{K}^r(l_\infty) = \mathcal{K}(l_\infty)$ verschiedenes Ideal, das gleichzeitig ein Verbandsideal ist.

Es ist klar, daß $\mathcal{K}^s(l_\infty)$ ein Ideal mit $\mathcal{K}(l_\infty) \subset \mathcal{K}^s(l_\infty) \subset \mathcal{L}(l_\infty)$ ist. Dabei gilt $\mathcal{K}^s(l_\infty)$, $\neq \mathcal{L}(l_\infty)$, denn die Identität gehört nicht zu $\mathcal{K}^s(l_\infty)$, da nach ALIPRANTIS und BURKINSHAW [2] T^2 kompakt ist, wenn $\pm T \leqq U \in \mathcal{K}(l_\infty)$ gilt. Um $\mathcal{K}(l_\infty) \neq \mathcal{K}^s(l_\infty)$ zu sehen, bemerken wir zunächst, daß l'_∞ nicht atomar ist (siehe dazu Bemerkung 2(a) zu Korollar 3.8). Es sei L_a der atomare Teil von l'_∞, dann liefert die Bandzerlegung $l'_\infty = L_a \oplus L_a^\perp$ mit $L_a^\perp$ einen atomlosen AL-Raum, d. h. $L_a^\perp = L_1(\mu)$. Man kann somit in L_a Rademacher-Funktionen r_n mit $|r_n| = f \in L_1(\mu)$ finden. Diese konvergieren schwach, aber nicht in der Norm gegen Null. Damit ist wegen $r_n^+ = (r_n + f)/2$

$$T_0(\xi_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n^+, \qquad T_0 \colon l_1 \to L_1(\mu) \hookrightarrow l'_\infty$$

ein positiver, schwach kompakter, aber nicht kompakter Operator, der durch den eindimensionalen $U_0 = e \oplus f$ majorisiert wird. Die gleichen Eigenschaften besitzt dann auch die Einschränkung T von T'_0 auf l_∞, d. h. T ist positiv, schwach kompakt, kompakt majorisiert, aber nicht kompakt. Diese Konstruktion findet man i. w. bei WICKSTEAD ([17]). Das konkrete Beispiel stammt von W. SCHACHERMAYER.

(e) Das letzte Beispiel kann auf den Fall übertragen werden, daß E ein ordnungsvollständiger BANACH-Verband ist, in dem $\mathcal{K}(E)$ nicht saturiert ist (d. h. es gilt nicht $\mathcal{K}^s(E) \subset \mathcal{K}(E)$). Dann sind $\mathcal{K}^r(E)$ und $\mathcal{J} := \overline{\mathcal{K}^s(E)}$ (Abschluß bez. der regulären Norm) verschiedene Ideale, von denen $\mathcal{K}^r(E)$ ein Unterverband und J ein Verbandsideal ist.

(f) Für $E = l_p \oplus l_q$, $1 \leqq p < q < \infty$, können wie im BANACH-Raum-Fall in $\mathcal{L}^r(E)$ verschiedene Ideale konstruiert werden, die gleichzeitig Verbandsideale sind.

(g) Wir geben noch einen BANACH-Verband E an, so daß $\mathcal{L}(E)$ nur ein Ideal besitzt während jedoch $\mathcal{L}^r(E)$ mehrere Ideale enthält, die gleichzeitig Ordnungs-Ideale und Verbände sind (da $\mathcal{L}^r(E)$ hierbei kein Verband ist, kann man Ordnungs-Ideal nicht durch Verbandsideal ersetzen). Es sei $E = c_0 \oplus c$. Da c_0 und c als BANACH-Räume isomorph sind, enthält $\mathcal{L}(E)$ nur $\mathcal{K}(E)$ als Ideal. Andererseits sind

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(c_0, c_0) & \mathcal{K}(c, c_0) \\ \mathcal{L}(c_0, c) & \mathcal{L}(c, c) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(c_0, c_0) & \mathcal{K}(c, c_0) \\ \mathcal{L}(c_0, c) & \mathcal{K}(c, c) \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ verschiedene Ideale und Ordnungsideale in $\mathcal{L}^r(E)$, wobei $\mathcal{J}_0$ und $\mathcal{J}_2$ Verbände sind. Die Inklusionen

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{J}_1 \arrow[dr, hook] & \\ \mathcal{K}(E) \arrow[r, hook] & \mathcal{J}_0 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{L}^r(E) \\ & & \mathcal{J}_2 \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

sind echt, $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ sind nicht vergleichbar. Zunächst hat man nach Korollar 1.2 $\mathcal{L}(c_0) = \mathcal{L}^r(c_0)$, $\mathcal{L}(c_0, c) = \mathcal{L}^r(c_0, c)$ und $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}^r(c)$. In Theorem 3.4 beweisen wir $\mathcal{L}^r(c, c_0) = \mathcal{K}^r(c, c_0) = \mathcal{K}(c, c_0)$, so daß der gesamte Operatorenraum $\mathcal{L}^r(E)$ die Blockgestalt

$$\mathcal{L}^r(E) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(c_0, c_0) & \mathcal{K}(c, c_0) \\ \mathcal{L}(c_0, c) & \mathcal{L}(c, c) \end{pmatrix}$$

hat. Daraus ergibt sich leicht die Idealeigenschaft für $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$. Diese Feststellung ist der wesentliche Unterschied zur „ungeordneten" BANACH-Raum-Situation. Da für einen AM-Raum M stets $\mathcal{K}(E, M) = \mathcal{K}^r(E, M)$ isometrisch gilt (vgl. [14, IV.1.1]), sind $\mathcal{K}(E)$, $\mathcal{J}_0$ und $\mathcal{J}_2$ Verbände. Schließlich zeigt noch Korollar 1.4, daß alle diese Ideale (einschließlich $\mathcal{J}_1$) auch Ordnungs-Ideale sind.

Wir zeigen noch, daß $\mathcal{L}^r(c)$ (und somit auch $\mathcal{L}^r(c_0 \oplus c)$) kein Verband ist. Für $x = (\xi_n) \in c$ mit $\xi = \lim \xi_n$ seien positive Operatoren T_1, T_2 durch

$$T_1 x := (\xi_1, \xi, \xi_2, \xi, \xi_3, \ldots) \quad \text{und} \quad T_2 x := (0, \xi, \xi_1, \xi, \xi_2, \xi, \ldots)$$

definiert. Dann ist $T := T_1 - T_2$ regulär,

$$Tx = (\xi_1, 0, \xi_2 - \xi_1, 0, \xi_3 - \xi_2, 0, \ldots),$$

und der einzige Kandidat U für $|T|$,

$$Ux = (\xi_1, 0, \xi_2 + \xi_1, 0, \xi_3 + \xi_2, 0, \ldots)$$

bildet nicht in c ab.

3. Die Gleichheit von $\mathcal{L}^r(E, F)$ und $\mathcal{K}^r(E, F)$

Wir führen zunächst bekannte BANACH-Raum-Resultate an, denen wir anschließend analoge BANACH-Verbands-Aussagen gegenüberstellen.

(1) (PITT's Theorem)
Für $1 \leqq q < p < \infty$ *gilt* $\mathcal{L}(l_p, l_q) = \mathcal{K}(l_p, l_q)$ *und* $\mathcal{L}(c_0, l_q) = \mathcal{K}(c_0, l_q)$.

(2) *Für* $1 \leqq q < 2$ *gilt* $\mathcal{L}(l_\infty, l_q) = \mathcal{K}(l_\infty, l_q)$, *aber* $\mathcal{L}(l_\infty, l_q) \neq \mathcal{K}(l_\infty, l_q)$ *für* $2 \leqq q < \infty$.

(3) *Für einen* BANACH-*Raum* F *gilt* $\mathcal{L}(c_0, F) = \mathcal{K}(c_0, F)$ *genau dann, wenn* F *keinen zu* c_0 *isomorphen abgeschlossenen Unterraum enthält.*

(4) *Für einen* BANACH-*Raum* E *gilt* $\mathcal{L}(E, l_1) = \mathcal{K}(E, l_1)$ *genau dann, wenn* E' *keinen zu* c_0 *isomorphen abgeschlossenen Unterraum enthält.*

Der Beweis von (1) ergibt sich leicht aus Lemma 2.2, (2) wird in Bemerkung 2 zu Theorem 3.4 gezeigt, die Beweise von (3) und (4) kann man etwa bei LACEY und WHITLEY [7] finden.

Das Analogon zu PITT's Theorem ist

Satz 3.1. *Für* $1 \leqq q < p < \infty$ *gilt* $\mathcal{L}^r(l_p, l_q) = \mathcal{K}^r(l_p, l_q)$ *und* $\mathcal{L}^r(c_0, l_q) = \mathcal{K}^r(c_0, l_q)$.

Beweis. Es sei $T \in \mathcal{L}^r(l_p, l_q)$. Dann folgt aus (1), daß $|T|$ kompakt ist. Satz 1.3 liefert $T \in \mathcal{K}^r(l_p, l_q)$. Der gleiche Schluß beweist auch die zweite Gleichung. #

Als nächstes zeigen wir die (3) und (4) entsprechenden Aussagen für BANACH-Verbände.

Ein BANACH-Verband E heißt *KB-Raum*, wenn jede wachsende, normbeschränkte Folge in E_+ konvergiert. Genau dann ist E ein KB-Raum, wenn es keinen abgeschlossenen Unterverband (oder auch nur Unterraum) gibt, der zu c_0 isomorph ist. Jeder KB-Raum E ist ein Band in seinem Bidual E'', mit $P = P_E: E'' \to E$ bezeichnen wir die Bandprojektionen. KB-Räume sind ordnungsstetig, ein dualer BANACH-Verband ist genau dann ein KB-Raum, wenn er ordnungsstetig ist. Alle reflexiven BANACH-Verbände, AL-Räume und separablen dualen BANACH-Verbände sind KB-Räume.

Theorem 3.2. *Für einen* BANACH-*Verband F sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) *F ist ein KB-Raum.*

(ii) *Jeder (positive) Operator von c_0 nach F ist kompakt.*

(ii*) *Jeder (positive) Operator von c_0 nach F ist schwach kompakt.*

(iii) $\mathcal{L}^r(c_0, F) = \mathcal{K}^r(c_0, F)$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii*) (für positive Operatoren) wird in [13, II.5.15] gezeigt. Da l_1 die Schur-Eigenschaft besitzt, ist jeder schwach kompakte Operator von F' nach l_1 kompakt. Somit sind (ii) und (ii*) äquivalent. Aus der oben zitierten Charakterisierung von KB-Räumen folgt sofort die Implikation von (iii) nach (i). Wir zeigen jetzt, wie sich (iii) aus (i) und (ii) ergibt. Wenn $T \in \mathcal{L}^r(c_0, F)$ ein regulärer Operator ist, dann ist wegen (ii) dessen Betrag kompakt. Damit gilt auch $|T|' \in \mathcal{K}(F', l_1)$, und Satz 1.3 liefert wegen $\pm T' \leqq |T'| \leqq |T|' \in \mathcal{K}(F', l_1)$, daß T' zu $\mathcal{K}^r$ gehört. Daraus folgt $T'' \in \mathcal{K}^r(l_\infty, F'')$ und auch $T = PT''J \in \mathcal{K}^r$, wobei $P = P_F$ die Bandprojektion von F'' auf F (F ist KB-Raum) und J die kanonische Einbettung von c_0 in $c^0 = l_\infty$ ist. Wegen (3) gelten (ii) und (ii*) auch für nicht-positive Operatoren. $\#$

Theorem 3.3. *Für einen* BANACH-*Verband E sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) *E' ist ordnungsstetig.*

(ii) *Jeder (positive) Operator von E nach l_1 ist kompakt.*

(ii*) *Jeder (positive) Operator von E nach l_1 ist schwach kompakt.*

(iii) $\mathcal{L}^r(E, l_1) = \mathcal{K}^r(E, l_1)$.

Beweis. Wegen der SCHUR-Eigenschaft von l_1 sind (ii) und (ii*) gleichbedeutend. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich jetzt direkt aus Satz 1.3. Wir zeigen nun, wie (i) aus (ii) folgt. Wenn E' nicht ordnungsstetig ist, dann gibt es einen abgeschlossenen Unterverband $E_0 \subset E$, der isomorph zu l_1 ist (vgl. [14, II.7.3]). Da l_1 die positive Fortsetzungseigenschaft besitzt (vgl. [13, II.8.9]), kann der Isomorphismus von E_0 auf l_1 zu einem positiven Operator von E nach l_1 fortgesetzt werden, der nicht kompakt ist. Das widerspricht (ii). Schließlich erhält man die Implikation von (i) nach (ii) durch Dualisieren der entsprechenden Aussage von Theorem 3.2. Wegen (4) gelten (ii) und (ii*) auch für beliebige Operatoren. $\#$

Obwohl die Formulierungen der Theoreme 3.2 und 3.3 ((i) und (iii)) nahezu identisch mit den eingangs zitierten BANACH-Raum-Resultaten sind, gilt in beiden Fällen $\mathcal{L}^r \neq \mathcal{L}$ und $\mathcal{K}^r \neq \mathcal{K}$, sofern nicht E oder F endlichdimensional ist (CARTWRIGHT und LOTZ [4]).

Die folgenden Theoreme beschreiben Situationen, in denen i. a. $\mathcal{L}(E, F) \neq \mathcal{K}(E, F)$ ist.

Theorem 3.4. *Für einen* BANACH-*Verband F sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) *F ist atomar und ordnungsstetig.*

(ii) *Für jeden kompakten* HAUSDORFF-*Raum K sind alle positiven Operatoren von $C(K)$ nach F kompakt.*

(iii) *Für jeden kompakten* HAUSDORFF-*Raum K gilt $\mathcal{L}^r(C(K), F) = \mathcal{K}^r(C(K), F)$.*
Falls F ordnungsvollständig ist, dann sind dazu auch nachfolgende Bedingungen äquivalent.

(ii^0) *Jeder positive Operator von l_∞ nach F ist kompakt.*

(iii^0) $\mathcal{L}^r(l_\infty, F) = \mathcal{K}^r(l_\infty, F)$.

Beweis. (i) impliziert (iii). F sei atomar und ordnungsstetig, und es sei $T\colon C(K) \to F$ ein regulärer Operator. Die Einheitskugel von $C(K)$ ist $[-e, e]$, wobei $e(t) = 1$ für $t \in K$ ist. Somit ist $|T|\,[-e, e] \subset [-|T|\,e, |T|\,e]$ relativ kompakt nach Satz 1.1, folglich ist $|T|$ kompakt und $T \in \mathcal{K}^r$ nach Satz 1.3. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (ii), (iii^0) $\Rightarrow$ (ii^0) und (iii) $\Rightarrow$ (iii^0) sind trivial. Wir zeigen noch (ii) $\Rightarrow$ (i). Dazu sei $u \in F_+$. Das von u erzeugte Hauptideal F_u wird mit $[-u, u]$ als Einheitskugel ein AM-Raum mit Einheit, ist also ein $C(K)$-Raum. Damit ist die identische Einbettung kompakt, d. h., das Ordnungsintervall $[-u, u]$ ist kompakt, und F ist nach Satz 1.1 ordnungsstetig und atomar. Schließlich bleibt noch der Schluß von (ii^0) nach (ii), aber den findet man bei I. POPA [12]. $\#$

Bemerkung 1. Analog Theorem 3.4 gelten folgende Resultate von MEYER-NIEBERG. Ein BANACH-Verband F ist genau dann ordnungsstetig, wenn jeder positive Operator von einem $C(K)$-Raum in F schwach kompakt ist; ein ordnungsvollständiger BANACH-Verband F ist genau dann ordnungsstetig, wenn jeder positive Operator von l_∞ in F schwach kompakt ist.

Bemerkung 2. Im Gegensatz zur BANACH-Raum-Situation (2) liefert Satz 3.4 $\mathcal{L}^r(l_\infty, l_q) = \mathcal{K}^r(l_\infty, l_q)$ für $1 \leqq q < \infty$.

(a) $\mathcal{L}(l_\infty, l_q) \neq \mathcal{K}(l_\infty, l_q)$ für $2 \leqq q < \infty$. Wir geben einen nicht kompakten Operator $T \in \mathcal{L}(l_\infty, l_q)$ mit dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
l_\infty \arrow[rrr, "T"] \arrow[d, "X"'] & & & l_q & \\
L_\infty(0,1) \arrow[rr, "I_2"] & & L_2(0,1) \arrow[ur, "B"] \arrow[rr, "P"] & & l_2 \arrow[ul, "B_q"']
\end{tikzcd}$$

Dabei sind I_2 und B_q die identischen Einbettungen, X ist ein Isomorphismus, der nach PELCZYNSKI existiert (siehe z. B. [9, S. 111]), und P bildet $f \in L_2(0, 1)$ auf $(Pf)_n = \int_0^1 f(t) \cos 2n\pi t \, dt$ ab.

(b) $\mathcal{L}(l_\infty, l_q) = \mathcal{K}(l_\infty, l_q)$ für $1 \leqq q < 2$. Das sieht man mit folgendem Argument, das wir H. JARCHOW und A. PIETSCH verdanken: Jeder Operator $T \in \mathcal{L}(l_\infty, l_q)$ ist für $1 \leqq q < 2$ absolut 2-summierend [11, 22.42] und läßt sich daher durch einen HILBERT-Raum faktorisieren [11, 17.3.7]. Wegen PITT's Theorem ist aber $\mathcal{L}(H, l_q) = \mathcal{K}(H, l_q)$.

Bemerkung 3. Da c und c_0 als BANACH-Räume isomorph sind, gilt $\mathcal{L}(c, l_q) = \mathcal{K}(c, l_q)$ für $1 \leqq q < \infty$, aber auch $\mathcal{L}(c, l_q) \neq \mathcal{L}^r(c, l_q) = \mathcal{K}^r(c, l_q)$.

Theorem 3.5. *Für einen* BANACH-*Verband F sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) *F ist ein atomarer KB-Raum.*

(ii) *Jeder positive Operator von einem AM-Raum nach F ist kompakt.*
(iii) *Für jeden AM-Raum M gilt* $\mathcal{L}^r(M, F) = \mathcal{K}^r(M, F)$.
(ii^0) *Alle positiven Operatoren von* c_0 *und* l_∞ *nach F sind kompakt.*
(iii^0) $\mathcal{L}^r(c_0, F) = \mathcal{K}^r(c_0, F)$ *und* $\mathcal{L}^r(l_\infty, F) = \mathcal{K}^r(l_\infty, F)$.

Beweis. (i) impliziert (iii). Es sei $T \in \mathcal{L}^r(M, F)$. Wegen Satz 1.3 genügt es zu zeigen, daß $U = |T|$ kompakt ist. Es sei B_M die Einheitskugel von M. Dann ist die Menge $C := \{|Ux| : x \in B_M\}$ nach oben gerichtet und normbeschränkt. Da F ein KB-Raum ist, gibt es ein $u \in F_+$, so daß $C \subset [0, u]$ gilt. Also ist $UB_M \subset [-u, u]$ relativ kompakt nach Satz 1.1. Da die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (ii^0) und (iii) $\Rightarrow$ (iii^0) trivial sind, bleibt noch (ii^0) $\Rightarrow$ (i). Das ergibt sich leicht durch Kombination der Theoreme 3.2 und 3.4. #

Bemerkung. Analog zu Bemerkung 1 gibt es auch zu diesem Theorem eine Variante, in der man kompakt durch schwach kompakt ersetzt: Ein BANACH-Verband F ist genau dann ein KB-Raum, wenn jeder positive Operator von einem AM-Raum nach F schwach kompakt ist.

Für einen AM-Raum M und einen AL-Raum L fällt $\mathcal{L}^r(M, L)$ mit dem Raum $\mathcal{J}(M, L)$ der integralen Operatoren zusammen, wobei die entsprechenden Normen gleich sind (siehe [13, IV.5.6] oder [14, III.2.11]). Da die nuklearen Operatoren $\mathcal{N}(M, L)$ der Abschluß der endlichdimensionalen Operatoren in $\mathcal{J}(M, L)$ sind [(11, 3.17]), erhält man unmittelbar das folgende

Korollar 3.6. *Es gilt* $\mathcal{J}(M, l_1) = \mathcal{L}^r(M, l_1) = \mathcal{K}^r(M, l_1) = \mathcal{N}(M, l_1)$ *für jeden AM-Raum M, wobei alle Normen übereinstimmen.* #

Schließlich zeigen wir noch die zu Theorem 3.4 duale Aussage.

Theorem 3.7. *Für einen* BANACH-*Verband E sind folgende Bedingungen äquivalent.*
(i) E' *ist atomar und ordnungsstetig.*
(ii) *Jeder positive Operator von E nach einem AL-Raum ist kompakt.*
(iii) *Für jeden AL-Raum L gilt* $\mathcal{L}^r(E, L) = \mathcal{K}^r(E, L)$.
(ii^0) *Jeder positive Operator von E nach* l'_∞ *ist kompakt.*
(iii^0) $\mathcal{L}^r(E, l'_\infty) = \mathcal{K}^r(E, l'_\infty)$.

Beweis. (i) impliziert (iii). Es sei $T \in \mathcal{L}^r(E, L)$. Aus Theorem 3.4 folgt $T' \in \mathcal{K}^r(L', E')$, also hat man $T'' \in \mathcal{K}^r(E'', L'')$. Da L ein KB-Raum ist, ergibt sich wie im Beweis von Theorem 3.2 $T \in \mathcal{K}^r(E, L)$. Aus (iii) folgt trivialerweise (ii). Nun gelte (ii). Es sei $x' \in E'_+$. Dann ist die kanonische Abbildung $Q: E \to (E, x')$ kompakt, wobei (E, x') der AL-Raum ist, der sich als Vervollständigung von E/N, $N := \{x \in E : \langle |x|, x' \rangle = 0\}$, unter der Norm $\|x + N\|_1 := \langle |x|, x' \rangle$ ergibt — siehe [13, II.8 Ex. 1] oder [14, II.9.7]). Der Dual von (E, x') kann auf natürliche Weise mit $E'_{x'}$ identifiziert werden, wobei Q' die Einbettung $E'_{x'} \hookrightarrow E'$ ist. Damit ist $[-x', x']$ kompakt, so daß E' atomar und ordnungsstetig sein muß.

Es bleibt noch der nicht-triviale Schluß von (ii^0) nach (i). Der ergibt sich aber durch Dualisieren von Theorem 3.4. #

Analog zu Korollar 3.6 haben wir

Korollar 3.8. *Es gilt* $\mathcal{J}(c_0, L_1) = \mathcal{L}^r(c_0, L) = \mathcal{K}^r(c_9, L) = \mathcal{N}(c_0, L)$ *für jeden AL-Raum L, wobei alle Normen übereinstimmen.* #

Bemerkung 1. Es gibt einen AM-Raum E ohne Atome, dessen Dual E' atomar (und natürlich ordnungsstetig) ist — siehe Lacey und Wojtaszczyk [8].

Bemerkung 2. Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.7 gibt es i. allg. stetige Operatoren, die nicht kompakt sind.

(a) Für den AL-Raum l'_∞ ist der duale Operator T' des in Bemerkung 2(a) zu Theorem 3.4 konstruierten Operators $T: l_\infty \to l_{p'}$ nicht kompakt von l_p nach l'_∞ für $1 \leqq p \leqq 2$. Darüber hinaus liefert diese Konstruktion für $p = 1$ (d. h. $p' = \infty$) einen schwach kompakten Operator in l'_∞, der nicht kompakt ist. Daraus folgt, daß l'_∞ nicht atomar sein kann, denn ein atomarer AL-Raum ist von der Form $l_1(\mathsf{A})$ und hat die Schur-Eigenschaft (jede schwach konvergente Folge konvergiert), so daß jeder schwach kompakte Operator in $l_1(\mathsf{A})$ kompakt ist.

(b) Es sei $L = L_1(0, 1)$, und r_n bezeichne die Rademacher-Funktionen. Für $1 \leqq p \leqq 2$ definiert $T_p(\xi_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n$ auf Grund der Chinčin-Ungleichung einen stetigen Operator von l_p nach L. Offenbar ist T_p für kein p kompakt, aber die Voraussetzungen von Theorem 3.7 (i) sind für $1 < p \leqq 2$ erfüllt. Damit folgt insbesondere, daß T_p nicht regulär ist. Für $p = 1$ ist T_1 regulär, somit ist $|T_1|$ kompakt ($|T_1|$ ist sogar eindimensional) — aber Satz 1.3 ist nicht anwendbar.

Literatur

[1] C. A. Akemann, Some mapping properties of the group algebra of a compact group, Pac. J. Math. **22** (1967) 1—8

[2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Positive compact operators on Banach lattices, Math. Z. **174** (1980) 289—298

[3] W. Arendt and A. R. Sourour, Ideals of regular operators on l^2, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983) 93—96

[4] D. I. Cartwright and H. P. Lotz, Some characterizations of AM- and AL-spaces, Math. Z. **142** (1975) 97—103

[5] P. Dodds and D. H. Fremlin, Compact operators in Banach lattices, Israel J. Math. **34** (1979) 287—320

[6] P. Halmos, Measure theory, 5th ed., Princeton 1958

[7] E. Lacey and J. R. Whitley, Conditions under which all bounded linear maps are compact, Math. Ann. **158** (1965) 1—5

[8] E. Lacey and P. Wojtaszczyk, Nonatomic Banach lattices can have l^1 as a dual space, Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976) 79—84

[9] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Sequence spaces, Berlin—Heidelberg—New York 1977

[10] —, Classical Banach spaces II, Function spaces, Berlin—Heidelberg—New York 1978

[11] A. Pietsch, Operator ideals, Berlin 1978

[12] I. Popa, Caractérisations opérationelles des espaces de Banach réticulés discrets, Rev. Roum. Math. **23** (1978) 437—443

[13] H. H. Schaefer, Banach lattices and positive operators, Berlin—Heidelberg—New York 1974

[14] H.-U. Schwarz, Banach lattices and operators, Leipzig 1984

[15] B. Walsh, On characterising Köthe sequence spaces as vector lattices, Math. Ann. **175** (1968) 253—256

[16] A. W. WICKSTEAD, Compact subsets of partially ordered Banach spaces, Math. Ann. **212** (1975) 271–284

[17] —, Extremal structure of cones of operators, Quart. J. Math. Oxford (2) **32** (1981) 239–253

[18] H.-Y. XIONG, On whether or not $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ for some classical Banach lattices E and F, Indag. Math. **46** (1984) 267–282

Mathematisches Institut
der Universität
D-7400 Tübingen
BRD

Sektion Mathematik
Karl-Marx-Universität
7010 Leipzig
DDR