



Übungsblatt 3

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 7.5.2015 um 12st in der Übung.¹

Aufgabe 1 (*Bestimmung der maximalen Lösung*) (5+10)

Man bestimme (mit Beweis!) die maximale Lösung von

(a) $\dot{y}(t) = y(t)^2 + ty(t)^2$ und $y(0) = 1$

(b) $\dot{y}(t) = |y(t)| + t$ und $y(0) = -1$

Aufgabe 2 (*Existenz einer globalen Lösung?*) (5+10*)

Welche der folgenden AWPes besitzen eine Lösung $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Begründung!)?

(a) $\dot{y}(t) = (2 + y(t)^2 + \sin(t))^{-1}(e^{-t^2} + 3t^2 + 5 + \cos(t))$ mit $y(0) = 1$

(b) $\dot{y}(t) = y(t)^2 + t(2 + \sin(t)) + y(t)e^t$ mit $y(0) = 1$

Aufgabe 3 (*Verhalten von Lösungen am Rand des Existenzintervalls II*) (10)

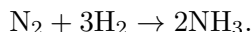
Man finde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $y_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar derart, dass die maximale Lösung $y: [0, t^+) \rightarrow \mathbb{R}^d$ zu $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit $y(0) = y_0$ erfüllt: Es ist $t^+ < \infty$ und y beschränkt, aber

$$\lim_{t \rightarrow t^+ -} y(t)$$

existiert nicht.

Aufgabe 4 (*Chemisches Gleichgewicht*) (10*+10+5*)

Wir beschäftigen uns hier mit der Ammoniaksynthese. Die gewünschte Reaktion ist



Wenn wir mit y_1 die Stoffmengenkonzentration von Stickstoff, mit y_2 die Stoffmengenkonzentration von Wasserstoff und mit y_3 die Stoffmengenkonzentration von Ammoniak bezeichnen, dann erhalten wir (Dabei sind $k_+ > 0$ und $k_- > 0$ Konstanten²):

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = k_- y_3(t)^2 - k_+ y_1(t) y_2(t)^3 \\ \dot{y}_2(t) = 3k_- y_3(t)^2 - 3k_+ y_1(t) y_2(t)^3 \\ \dot{y}_3(t) = 2k_+ y_1(t) y_2(t)^3 - 2k_- y_3(t)^2. \end{cases}$$

- (a) Man zeige, dass für gegebenes $y_1(0) > 0$, $y_2(0) > 0$ und $y_3(0) > 0$ genau eine globale Lösung des obigen Systems existiert (nur für positive Zeiten verlangt). Man vereinfache zudem das System in eine einzige DGL für y_1 .
- (b) Man untersuche $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ (mit AWen wie in (a)) für $t \rightarrow \infty$ auf Konvergenz³ und stelle eine Beziehung zwischen den drei Grenzwerten und k_+/k_- her.
- (c) Bei Normaldruck und kleiner Temperatur ist k_+/k_- groß und k_+ sehr klein. Für steigende Temperatur wird k_+ größer und k_+/k_- drastisch kleiner. Man erkläre, was sich dadurch

¹Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren.

Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.

²Diese sind von der Temperatur und dem Druck (welche wir hier beide als konstant voraussetzen) abhängig.

³Es gibt durchaus wichtige chemische Reaktionen, die nicht konvergieren. Solche Reaktionen sind wichtig für diverse biologische Prozesse, etwa für den Herzschlag oder den Schlaf-Wach-Rhythmus.

für ein Problem bei der Produktion von Ammoniak ergibt⁴ und begründe die Gestalt des Differenzialgleichungssystems durch die Reaktionsgleichung.

⁴Dem angesprochenen Problem begegnet man im Haber-Bosch-Verfahren (damit zusammenhängende Nobelpreise 1918, 1931 und 2007) mit einer Erhöhung des Drucks und der Nutzung eines Katalysators.