ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Übungsblatt 5

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 21.5.2015 um 12**st** in der Übung.[1]

Aufgabe 1 (*Lineare Differenzialgleichungssysteme*) (8+8+9)

(a) Man berechne alle reellen Lösungen des folgenden Differenzialgleichungssystems:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) + y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_3(t) + 2y_4(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_3(t) + y_4(t) \end{cases}$$

(b) Man berechne alle reellen Lösungen des folgenden Differenzialgleichungssystems:

$$\begin{cases} y_1''(t) = y_1(t) - y_1'(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_1'(t) + y_2(t) \end{cases}$$

(c) Man gebe die Lösung des folgenden Anfangswertproblems an (mit Herleitung):

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - 2y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_2(t) = y_4(t) + y_2(t) + \sin(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_3(t) + y_1(t) + t \\ \dot{y}_4(t) = y_4(t) + y_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (*Ein einfaches Randwertproblem*) (5+5*)

Es sei $l \in (0, \infty)$ fest. Anstatt Anfangswerte an eine Differenzialgleichung vorzugeben, geben wir nun Randwerte vor.

(a) Man finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass es eine nicht-konstante Lösung von $y''(t) = \lambda y(t)$ gibt mit $y(0) = y(l) = 0$.

(b) Man bestimme die $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche gilt:
Für jedes stetige $f\colon [0, l] \to \mathbb{R}$ hat die Differenzialgleichung $y''(t) = \lambda y(t) + f(t)$ genau eine Lösung mit $y(0) = y(l) = 0$?

Aufgabe 3 (*Differenzialgleichungen mit vorgegebener Lösung*) (5+5)

Wir fragen uns, ob es eine Differenzialgleichung $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar gibt, welche eine fest vorgegebene Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ hat. Geben Sie entweder eine solche Differenzialgleichung an (inklusive Herleitung wie Sie auf diese DGL gekommen sind) oder beweisen Sie, dass es keine solche Differenzialgleichung gibt.

(a) $y(t) = \sin(t)$ und $d = 1$.

(b) $y(t) = \left(e^t - e^{-t}, \cos(t)\right)^T$ mit $d = 2$.

[1] Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren. Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.

 (Σ 40+5*)