ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Übungsblatt 6

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 28.5.2015 um 12**st** in der Übung.[1]

Aufgabe 1 (*Die Jordansche Normalform*) (10)
Finden Sie eine Basiswechselmatrix S derart, dass die folgende Matrix A durch den Basiswechsel zu einer Jordan-Matrix $J = S^{-1}AS$ wird. Zudem berechne man e^{tA}. Dabei ist A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*Anwendung der Jordanschen Normalform auf Differenzialgleichungen*) (5+5)
Man berechne die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) + 3y_2(t) - y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) + y_3(t) - y_4(t) \\ \dot{y}_4(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = y_3(0) = -1,\ y_4(0) = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) + 3y_2(t) - y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) + y_3(t) - y_4(t) \\ \dot{y}_4(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Anwendung des Satzes von Peano*) (5+5+5+5)
Nächste Woche werden Sie in der Vorlesung den *Satz von Peano* kennenlernen. Dieser besagt:

> Ist $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ offen, $(t_0, y_0) \in \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann gibt es ein offenes Interall I mit $t_0 \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}^d$ mit $(t, y(t)) \in \Omega$ für alle $t \in I$, $y(t_0) = y_0$ und $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ für $t \in I$. Kurz gesagt besitzt das Problem
>
> $$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> eine lokale Lösung um t_0, falls $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig ist.

Aufbauend auf diesem Satz werden Sie die Existenz von maximalen Lösungen beweisen und zeigen, dass Korollar (6.2) in dieser Situation gilt. Diese Aussagen dürfen Sie verwenden.

(a) Zeigen Sie die Existenz einer maximalen Lösung für die Probleme in (b) und (c).
(b) Man zeige, dass folgendes Anfangswertproblem eine Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ besitzt:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t) - 1} + \sqrt[3]{\sin(y(t))} + y(t)^2 + 3 - y(t)^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(c) Man berechne eine maximale Lösung von $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{1 - y(t)}$ mit $y(0) = 0$.
(d) Ist in der Situation von Peano bzw. Picard-Lindelöf die maximale Lösung eindeutig (je ein Gegenbeispiel oder eine Begründung)?

[1] Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren. Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.