ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Probeklausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Die Bearbeitungszeit ist auf zwei Stunden angesetzt.[1]

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! Sie dürfen alle Aussagen aus der Vorlesung und der Übung benutzen. 100% entsprechen 100 Punkten.

Aufgabe 1 (*maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)

Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $2e^t y(t)\dot{y}(t) + e^t y(t)^2 + t = 0$ mit $y(0) = -1$

(b) $\dot{y}(t) = (1+t^2)^{-1} y(t) + 2t - 1$ mit $y(0) = 0$

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungen*) (20)

Finden Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t \\ \dot{y}_2(t) = -3y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_4(t) = y_3(t) + y_4(t) + y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_4(t) + y_5(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10)

Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = e^t \sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 1$

(b)

$$\begin{cases} y_1''(t) = |y_1'(t)| + 2y_2(t)y_1(t) \\ y_2'(t) = \sin y_1'(t) + y_1(t) + y_2^3(t) + t \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \cos y(t) - y(t)^2$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

(b) Man beweise oder widerlege, dass das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \cos y(t) + 2 + y(t) + y(t)^3$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

[1] Lösungen zu manchen Aufgaben werden im Tutorium besprochen. Welche der Aufgaben können Sie bis zum 29.5.2015 12 Uhr im Moodle mitentscheiden.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussage richtig und welche falsch ist. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, Beispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet sollte diese negativ sein.

(a) Das Anfangswertproblem $y''(t) + y(t) + \sin y'(t) = 0$ mit $y(0) = 1$ hat eine eindeutige maximale Lösung.

☐ richtig ☐ falsch

(b) Das Anfangswertproblem $y''(t) + y(t) + \sin y'(t) = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 1$ hat eine eindeutige maximale Lösung.

☐ richtig ☐ falsch

(c) Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \sqrt{|y(t)|} - \sin(y(t))$ mit $y(0) = 1$ besitzt mindestens eine maximale Lösung.

☐ richtig ☐ falsch

(d) Die Differenzialgleichung

$$\frac{2y(t)\dot{y}(t)}{t^2 + y(t)^2} + \frac{2t}{t^2 + y(t)^2} = 0$$

ist exakt.

☐ richtig ☐ falsch

Aufgabe 6 (*Bonusaufgabe*) (20*)

Man widerlege folgende Aussage:
Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar hat das Anfangswertproblem

$$y''(t) = f(y(t), y'(t)), \quad y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1$$

bekanntlich eine eindeutige maximale Lösung. Wir setzen nun weiter voraus, dass diese maximale Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ beschränkt ist auf $I \cap [t_0, \infty)$. In dem Fall gilt bereits $I \supset [t_0, \infty)$.
Hinweis: Aus der Vorlesung wissen Sie, was mit der Lösung am Rand passieren kann. Sie sollten also zuerst ein geeignetes y suchen. Danach sollten Sie f derart wählen, dass y eine Lösung der Differenzialgleichung wird.