



Übungsblatt 1 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 22.10.2014 um 12 Uhr in der Übung

Es gibt eine Version mit und eine ohne Hinweise (beide sind online verfügbar)!

Aufgabe 1 (*Translationshalbgruppen*) (3+5)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes nicht-triviales Intervall. Wir betrachten die Abbildung $T: (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(L^p(I))$. Dabei ist

$$T(t): L^p(I) \rightarrow L^p(I)$$

auf $L^p(I)$ für $p \in [1, \infty]$ definiert durch

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} f(t+s) & , \text{ falls } t+s \in I \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für fast alle $s \in I$. Man zeige, dass

- (a) T **keine** C_0 -Halbgruppe für $p = \infty$ ist.
- (b) T eine C_0 -Halbgruppe für $p < \infty$ definiert.

Aufgabe 2 (*Ähnliche und quasi-kontraktive C_0 -Halbgruppen*) (3+5*+3)

- (a) Es seien X, Y Banachräume, $S: X \rightarrow Y$ ein bijektiver beschränkter Operator, und $T: (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ eine C_0 -Halbgruppe auf X . Man zeige, dass $(0, \infty) \ni t \mapsto ST(t)S^{-1}$ eine C_0 -Halbgruppe auf Y definiert.
- (b) Man gebe eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(I)$ (mit $p \in [1, \infty)$) für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, die nicht quasi-kontraktiv¹ ist.
- (c) Man zeige, dass die C_0 -Halbgruppe $(0, \infty) \ni t \mapsto e^{tA}$ für einen beschränkten Operator $A: X \rightarrow X$ quasi-kontraktiv ist.

Aufgabe 3 (*Multiplikationshalbgruppen*) (4+5*+2)

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$. Weiter sei $m: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Abbildung mit

$$\operatorname{Re} m(x) \leq C$$

für ein $C > 0$ und μ -fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren die Abbildung

$$T: (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)), \quad T: t \mapsto T(t) = M_{\exp(tm)}.$$

Dabei ist $M_{\exp(tm)}$ der Multiplikationsoperator zu $\exp(tm)$, d.h.

$$(T(t)f)(x) := \left(M_{\exp(tm)} f \right) (x) := \exp(tm(x))f(x)$$

für μ -fast alle $x \in \Omega$. Man zeige, dass

- (a) T nur dann eine C_0 -Halbgruppe für $p = \infty$ definiert, wenn m in $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ liegt.
- (b) T eine C_0 -Halbgruppe für $p < \infty$ definiert.
- (c) T eine quasi-kontraktive C_0 -Halbgruppe ist, falls $p < \infty$ ist.

¹Man nennt eine C_0 -Halbgruppe $T: (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ **quasi-kontraktiv**, falls es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ für alle $t > 0$.