



## Übungsblatt 10 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 7.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Dies ist ein Wiederholungsblatt über die Ferien

**Aufgabe 1** ( *$C_0$ -Gruppen und Generatoren bestimmen*) (5+5+5\*)

Es sei  $T(t)f = f(\cdot + t)$  für  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  und  $t > 0$  gegeben. Dabei ist  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  der Raum der auf  $[0, 2\pi]$  quadrat-integrierbaren und  $2\pi$ -periodischen Funktionen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $T$  eine  $C_0$ -Gruppe ist.
- (b) Bestimmen Sie den Erzeuger  $A$  von  $T$ .
- (c) Man zeige, dass  $A^2$  eine holomorphe  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt. Geben Sie außerdem eine explizite Formel für diese  $C_0$ -Halbgruppe an.

**Aufgabe 2** (*Wohlgestellte Probleme und Störungstheorie*) (5\*+10+5\*)

- (a) Es sei  $A$  der Operator aus Aufgabe 1 (b). Geben Sie ein Anfangsrandwertproblem an, welches zu  $A^2$  gehört. Was können Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 (c) über diese Problem sagen?
- (b) Man beweise oder wiederlege, dass das folgende Problem wohlgestellt ist:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a(x)u_{xx}(t, x) + b(x)u_x(t, x) + c(x)u(t, x) & t \geq 0 \text{ und } x \in [0, 1] \\ u_x(t, 0) = u(t, 0) & t \geq 0 \\ u_x(t, 1) = -u(t, 1) & t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Dabei sind  $a, b, c$  stetige Funktionen und  $a(x) > 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Weiter ist für  $f$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion erlaubt mit  $f'(0) - f(0) = f'(1) + f(1) = 0$ .

- (c) Man beweise oder wiederlege, dass das folgende Problem wohlgestellt ist:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) & t \geq 0 \text{ und } x \in [0, 1] \\ u_x(t, 0) = -u_x(t, 1) & t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Hier sei  $f \in C^\infty([0, 1])$  mit  $f'(0) = -f'(1)$ .

**Aufgabe 3** (*Wesentliche Definitionsbereiche und Vergleich von  $C_0$ -Halbgruppen*) (5\*+10\*+5\*)

- (a) Es sei  $A$  der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T$ . Man zeige, dass  $D(A^\infty) = \{f \in X : f \in D(A^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$  ein wesentlicher Definitionsbereich für  $A$  ist.
- (b) Man beweise, dass es genau eine  $C_0$ -Halbgruppe  $T$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  mit Generator  $A$  gibt für den  $Af = \Delta f$  (im schwachen Sinn) für alle  $f \in D(A)$  gilt.
- (c) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene beschränkte Menge. Ist  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein wesentlicher Definitionsbereich für  $\Delta^D$  (dies sei der Dirichlet-Laplace auf diesem Gebiet)?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4** (*Invarianz von abgeschlossenen Mengen*) (5\*)

In dem wohlgestellten Problem in Aufgabe 2 (b) bzw. (c) zeige oder widerlege man (falls dieses wohlgestellt ist!), dass  $u(t, \cdot) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  gilt, falls  $f \geq 0$  ist.

**Aufgabe 5** (*Für Interessierte: Eine einfache Schrödingergleichung III<sup>1</sup>*) (10\*)

Ziel der Aufgabe ist es einen physikalisch anschaulichen Beweis für den **Satz von Hörmander** zu geben. Dazu sei  $S$  die Schrödingerhalbgruppe definiert auf Blatt 8 Aufgabe 3 oder Blatt 9 Aufgabe 3. Der Satz von Hörmander besagt, dass für alle  $t \neq 0$  der Operator  $S(t)$  nicht beschränkt ist in der  $L^p(\mathbb{R})$ -Norm, wobei  $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$  ist. Beweisen Sie nun diesen Satz indem Sie analog vorgehen wie auf Blatt 9 Aufgabe 3(a).

---

<sup>1</sup>Diese Aufgabe wird in der Übung nicht besprochen.