



Übungsblatt 11 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 14.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Der assoziierte Operator einer Form*) (5*+5*+10*)

Geben Sie ohne Beweis den zu den folgenden Formen $a: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ assoziierten Operator $-A$ auf H sowie das zu A gehörige ARWP an. Dabei ist V stets ein dichter Unterraum von $H = L^2((0, 1); \mathbb{C})$.

- (a) $a(u, v) = (u'|v')_H + (u'|v)_H$ für $u, v \in V = \{f \in H^1((0, 1); \mathbb{C}) : f(0) = f(1)\}$.
- (b) $a(u, v) = i(u'|v')_H$ für $u, v \in V = H_0^1((0, 1); \mathbb{C})$.
- (c) $a(u, v) = (u''|v'')_H$ für $u, v \in V = H_0^1((0, 1); \mathbb{C}) \cap H^2((0, 1); \mathbb{C})$.

Aufgabe 2 (*Formen für den Dirichlet-Laplace und den Neumann-Laplace*) (5+5+10*+10*)

In der Vorlesung haben wir den Dirichlet-Laplace Δ_2^D auf $L^2(\Omega)$ und der Übung den Neumann-Laplace Δ_2^N eingeführt. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

- (a) Geben Sie eine Form an, deren assoziierter Operator $-\Delta_2^D$ ist.
- (b) Geben Sie eine Form an, deren assoziierter Operator $-\Delta_2^N$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass Δ_2^D eine kontraktive holomorphe C_0 -Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt, indem Sie Eigenschaften der Form aus (a) untersuchen.
- (d) Zeigen Sie, dass Δ_2^N eine kontraktive holomorphe C_0 -Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt, indem Sie Eigenschaften der Form aus (b) untersuchen.

Aufgabe 3 (*Störung einer Form*) (10+10*)

Es sei $a: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Form und V ein Hilbertraum, welcher dicht in einen Hilbertraum H eingebettet ist. Weiter sei $b: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Form mit $|b(v, u)| \leq C\|v\|_V\|u\|_H$ für ein $C > 0$. Wir definieren $a + b: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$(a + b)(v, u) = a(v, u) + b(v, u) \quad (u, v \in V)$$

und fassen $a + b$ als Störung von a auf.

- (a) Man zeige, dass $a + b$ beschränkt (bzw. H -elliptisch) ist, falls a diese Eigenschaft hat. Man zeige weiter, dass die Definitionsbereiche der assoziierten Operatoren auf H identisch sind.
- (b) Man zeige, dass A mit $D(A) = D(\Delta_2^D)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) und

$$Au = \Delta_2^D u + \beta^T \nabla u + \gamma u$$

für eine beschränkte messbare Funktion $\beta: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ und eine beschränkte messbare Funktion $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe C_0 -Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt¹.

¹Das bedeutet, dass A eine C_0 -Halbgruppe erzeugt und diese auf den Sektor $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorph fortgesetzt werden kann.