ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 11

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 14.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Der assoziierte Operator einer Form*) (5*+5*+10*)
Geben Sie ohne Beweis den zu den folgenden Formen $a\colon V \times V \to \mathbb{C}$ assoziierten Operator $-A$ auf H sowie das zu A gehörige ARWP an. Dabei ist V stets ein dichter Unterraum von $H = L^2((0,1);\mathbb{C})$.

(a) $a(u,v) = (u'|v')_H + (u'|v)_H$ für $u,v \in V = \{f \in H^1((0,1);\mathbb{C}) : \ f(0) = f(1)\}$.
(b) $a(u,v) = i(u'|v')_H$ für $u,v \in V = H_0^1((0,1);\mathbb{C})$.
(c) $a(u,v) = (u''|v'')_H$ für $u,v \in V = H_0^1((0,1);\mathbb{C}) \cap H^2((0,1);\mathbb{C})$.

Aufgabe 2 (*Formen für den Dirichlet-Laplace und den Neumann-Laplace*) (5+5+10*+10*)
In der Vorlesung haben wir den Dirichlet-Laplace Δ_2^D auf $L^2(\Omega)$ und der Übung den Neumann-Laplace Δ_2^N eingeführt. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.
Hinweis: Diese Aufgabe haben Sie im Wesentlichen bereits in der Vorlesung gemacht!

(a) Geben Sie eine Form an, deren assoziierter Operator $-\Delta_2^D$ ist.
(b) Geben Sie eine Form an, deren assoziierter Operator $-\Delta_2^N$ ist.
(c) Zeigen Sie, dass Δ_2^D eine kontraktive holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt, indem Sie Eigenschaften der Form aus (a) untersuchen.
(d) Zeigen Sie, dass Δ_2^N eine kontraktive holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt, indem Sie Eigenschaften der Form aus (b) untersuchen.

Aufgabe 3 (*Störung einer Form*) (10+10*)
Es sei $a\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Form und V ein Hilbertraum, welcher dicht in einen Hilbertraum H eingebettet ist. Weiter sei $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Form mit $|b(v,u)| \le C\|v\|_V\|u\|_H$ für ein $C > 0$. Wir definieren $a + b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ über

$$(a+b)(v,u) = a(v,u) + b(v,u) \qquad (u,v \in V)$$

und fassen $a+b$ als Störung von a auf.

(a) Man zeige, dass $a+b$ beschränkt (bzw. H-elliptisch) ist, falls a diese Eigenschaft hat. Man zeige weiter, dass die Definitionsbereiche der assoziierten Operatoren auf H identisch sind.
Hinweis: Man benutze die Young-Ungleichung. Siehe Lösung zu Blatt 9 Aufgabe 1 (b) für ein Beispiel.
(b) Man zeige, dass A mit $D(A) = D(\Delta_2^D)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) und

$$Au = \Delta_2^D u + \beta^T \nabla u + \gamma u$$

für eine beschränkte messbare Funktion $\beta\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ und eine beschränkte messbare Funktion $\gamma\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\pi/2$ erzeugt[1].
Hinweis: Dies ist eine Anwendung von (a) auf die Form a aus Aufgabe 1 (a) und

$$b(v,u) = -\int_\Omega \left(\overline{u}\beta^T \nabla v + \overline{u} v \gamma\right)\, d\lambda.$$

[1]Das bedeutet, dass A eine C_0-Halbgruppe erzeugt und diese auf den Sektor $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorph fortgesetzt werden kann.