ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 12

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 21.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Ein Differentialoperator 4. Ordnung*) (5+15*)

(a) Wir fassen $Af = -f''''$ auf als Operator auf $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $D(A) = H^4(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Man zeige, dass A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.
Hinweis: Der Operator hängt mit der Form

$$a\colon V \times V \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int_{\mathbb{R}} u''\overline{v}''\,d\lambda$$

zusammen. Der Definitionsbereich ist dabei $V = H^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Alternativ kann man A auch als Quadrat von $Bf = if''$ schreiben, wobei $D(B) = H^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (B erzeugt eine C_0-Gruppe!).

(b) Man finde einen Erzeuger B einer holomorphen C_0-Halbgruppe auf $L^2((0,1);\mathbb{C})$ mit $D(B) \subset H^4((0,1);\mathbb{C})$ und $Bf = -f''''$. Man beweise zudem, dass der von ihnen gefundene Operator eine C_0-Halbgruppe erzeugt.
Hinweis: Der Operator $-B$ ist assoziiert zur Form

$$a\colon V \times V \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int_{(0,1)} u''\overline{v}''\,d\lambda$$

ist eine geeignete Wahl, wenn man V geeignet wählt (warum?).

Aufgabe 2 (*Invarianz durch Formen*) (10+5+15*)

Entscheiden und beweisen Sie, welche der Operatoren C_0-Halbgruppen T erzeugen, die positiv[1], kontraktiv[2], bzw. submarkovsch[3] sind.
Hinweis: Man muss in jedem Fall einfach die Invarianzbedingung für Formen überprüfen. Die orthogonalen Projektionen P auf $L^2(\Omega)$ sind der Reihe nach für die einzelnen Invarianzprobleme: $Pu = u\mathbb{1}_{u>0}$, $Pu = \mathbb{1}_{[0,1]}(\|u\|_2)u + \mathbb{1}_{(1,\infty]}(\|u\|_2)\|u\|_2^{-1}u$ und $Pu = u\mathbb{1}_{u\leq 1} + \mathbb{1}_{u>1}$. Es reicht, dass Sie dies einmal für eine Projektion auch tatsächlich beweisen.

(a) Man betrachte den Operator $A + 2$, wobei A aus Aufgabe 1 ist.
Hinweis: Hier achte man insbesondere auf die Bedingung $PV \subset V$. Die Form von A finden Sie im Hinweis zur Aufgabe 1. Wie sieht dann die Form von $A + 2$ aus?

(b) Der Operator A sei assoziiert zu der stetigen und H-elliptischen Form (dies müssen Sie nicht beweisen)

$$a\colon V \times V \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int_0^1 u'\overline{v}'\,d\lambda + \beta_0 u(0)\overline{v(0)} + \beta_1 u(1)\overline{v(1)}.$$

Dabei seien $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ und $H = L^2((0,1),\mathbb{C})$. Der Definitionsbereich ist dabei $V = H^1((0,1);\mathbb{C})$.

(c) Der zu dem Problem

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + xu_x(t,x) & (t>0, x\in[0,1]) \\ u_x(t,1) = 0 & (t>0) \\ u_x(t,0) = 0 & (t>0) \\ u(0,x) = f(x) & (x\in[0,1]) \end{cases}$$

[1] $T(t)f \geq 0$, falls $f \geq 0$
[2] $\|T(t)\|_2 \leq 1$
[3] $T(t)f \leq 1$, falls $f \leq 1$

Bitte wenden!

gehörende Operator A auf $H = L^2((0,1))$.
Hinweis: Man überlege sich die zugehörige Form. Hier müssen Sie auch beweisen, dass die Form H-elliptisch und stetig ist. Sonst dürfen Sie die Kriterien nicht anwenden.

Aufgabe 3 (*Multiple-Choice*) (20*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es +2 und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) −2 Punkte. Die Gesammtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.
Bemerkung: Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

(a) Es sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $A = \Delta_2^N$ der Neumann-Laplace auf $L^2(\Omega)$. Die folgenden Mengen sind wesentliche Definitionsbereiche
☐ $\mathcal{D}(\Omega)$ ☐ $D(A)$ ☐ $D(A^2)$

(b) Der Erzeuger der Translationshalbgruppe aus den Linksschifts auf $C_0([0,1))$ hat den Definitionsbereich $C^1([0,1)) \cap C_0([0,1))$
☐ wahr ☐ falsch

(c) Ist A der Erzeuger einer kontraktiven C_0-Gruppe, dann ist A^2 Erzeuger einer
☐ C_0-Gruppe ☐ kontraktiven C_0-Halbgruppe ☐ holomorphen C_0-Halbgruppe

(d) Erzeugt A eine kontraktive holomorphe C_0-Halbgruppe auf dem Sektor $\Sigma_{\pi/2}$, dann erzeugen $\pm iA$ eine kontrakive C_0-Gruppe. Ist umgekehrt iA der Erzeuger einer kontraktiven C_0-Gruppe, dann ist A oder $-A$ der Erzeuger einer holomorphen C_0-Halbgruppe.
☐ erste Aussage ist wahr ☐ zweite Aussage ist wahr ☐ beide sind falsch

(e) Auf folgenden Räumen gibt es einen Erzeuger A einer C_0-Halbgruppe mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset D(A)$ und $A\varphi = \Delta\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:
☐ $L^1(\mathbb{R}^n)$ ☐ $L^2(\mathbb{R}^n)$ ☐ $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ☐ $C_0(\mathbb{R}^n)$ ☐ $C_b(\mathbb{R}^n)$ ☐ $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$

(f) Es sei T eine C_0-Halbgruppe auf einem Hilbertraum. Weiter sei A der Erzeuger von T. Dann erzeugt A^* die C_0-Halbgruppe S mit $S(t)^* = T(t)$ für alle $t \geq 0$.
☐ $S(t)^* = T(t)$ i.A. falsch aber A^* erzeugt eine C_0-Halbgruppe ☐ Die Aussage ist falsch
☐ Die Aussage ist wahr

(g) Die Menge $M = \{\alpha \in \mathbb{C} : \text{ der Abschluss von } \alpha A \text{ erzeugt eine } C_0\text{-Halbgruppe}\}$ kann folgende Gestallt annehmen (A ein dicht-definiert Operator auf X):
☐ $\emptyset$ ☐ $\{0\}$ ☐ Ursprungsgerade oder -halbgerade ☐ $\overline{\Sigma_\theta} \supset M \supset \Sigma_\theta \cup \{0\}$
☐ Sektor mit Winkel zwischen $\pi/2$ und π ☐ weitere noch nicht aufgelistete Formen

(h) Man betrachte die Wohlgestelltheit (auf dem Raum der stetigen Funktionen - klassische Ableitung und stetige Abhängigkeit in der Supremumsnorm) der folgenden Probleme (für f in einer geeigneten dichten Teilmenge der stetigen Funktionen)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \alpha u_{xx}(t,x) & (t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0 & (t \geq 0) \\ \lim_{x\to-\infty} u(t,x) = 0 & (t \geq 0) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in [0,1]) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) & (t \geq 0, x \in [0,1]) \\ u_x(t,0) = 0 & (t \geq 0) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

☐ Das zweite Problem ist wohlgestellt ☐ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\alpha > 0$
☐ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$ ☐ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\operatorname{Re}\alpha > 0$

(i) Es sei A auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta(m \cdot u) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ mit $Au = m^{-1}\Delta(m \cdot u)$. Der Operator A erzeugt für jede messbare und beschränkte Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ eine
☐ quasi-kontraktive C_0-Halbgruppe ☐ C_0-Halbgruppe
☐ holomorphe C_0-Halbgruppe

Bitte wenden!

(j) Es sei A der Operator der vorigen Teilaufgabe. Dann gibt es stets eine stetige und H-elliptische Form a deren assoziierter Operator $-A$ ist ($H = L^2(\mathbb{R}^n)$).

□ wahr □ falsch