Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 14

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 4.2.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Wohlgestelltheit mit periodischen zeitlichen Randbedinungen*) (3*+2*+10)
Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T.

(a) Unter welchen Voraussetzung an T existiert mindestens eine milde Lösung $u \in C([0,1];X)$ von $\dot{u} = Au + f$ mit $u(0) = u(1)$ für alle $f \in L^1((0,1);X)$ (ohne Beweis)?
Hinweis: Dies ist fast identisch ein Satz der Vorlesung.

(b) Unter welchen Voraussetzung an T existiert höchstens eine milde Lösung $u \in C([0,1];X)$ von $\dot{u} = Au + f$ mit $u(0) = u(1)$ für alle $f \in L^1((0,1);X)$ (ohne Beweis)?
Hinweis: Dies ist ein Satz in der Vorlesung.

(c) Unter den Voraussetzungen von (a) und (b) hängt die Lösung dann stetig von f ab. Mit anderen Worten man zeige, dass die Abbildung

$$L^1((0,1);X) \ni f \mapsto u_f \in C([0,1];X)$$

stetig ist. Dabei ist u_f die eindeutige Lösung von $\dot{u} = Au + f$ auf $[0,1]$ mit $u(0) = u(1)$.
Hinweis: Dies ist eine einfache Aufgabe mit dem Satz über abgeschlossene Graphen.

Aufgabe 2 (*Verklebung milder Lösungen*) (5+5*+5)
Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T und $f \in L^1(\mathbb{R};X)$ wir untersuchen das Problem $\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ in geeigneten Teilintervallen.

(a) Es seien $u\colon I \to X$ und $v\colon J \to X$ milde Lösungen des obigen Problems mit $I \cap J = \{t_0\}$, wobei t_0 der rechte Endpunkt von I und der linke von J ist, und $u(t_0) = v(t_0)$. Man zeige, dass dann $t \mapsto u(t)\mathbb{1}_I(t) + v(t)\mathbb{1}_{J\setminus\{t_0\}}(t)$ wieder eine milde Lösung des obigen Problems auf $I \cup J$ ist.
Hinweis: Man muss nur die Definition überprüfen.

(b) Ist die Aussage in (a) auch richtig für klassische[1] Lösungen? Man beweise diese Aussage oder gebe ein Gegenbeispiel.
Hinweis: Man findet sehr leicht Gegenbeispiele für $A = 0$.

(c) Es sei $u\colon [0,1] \to X$ eine milde Lösung des obigen Problems mit $u(0) = u(1)$ und f sei 1-periodisch. Man zeige, dass die periodische Fortsetzung von u eine milde Lösung des obigen Problems auf $\mathbb{R}$ definiert.
Hinweis: Man benutze Aufgabe 1 (a)

Aufgabe 3 (*Wohlgestelltheit und milde Lösungen*) (5*+10*+15*)
Es sei A ein dicht-definiert abgeschlossener Operator auf X. Dann sind äquivalent

(i) A erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X

(ii) für jedes $x \in X$ gibt es genau eine milde Lösung $u_x \in C([0,\infty);X)$ von $\dot{u}(t) = Au(t)$ für $t \geq 0$ mit $u(0) = x$.

Weiter ist dann die von A erzeugte C_0-Halbgruppe T gegeben durch $T(t)x = u_x(t)$ ($x \in X$, $t > 0$). Dies wollen wir hier zeigen.

(a) Zeigen Sie (i)$\Rightarrow$(ii).

[1] In dem Sinne, dass u differenzierbar ist und $\dot{u} = Au + f$ in L^1 gilt.

Bitte wenden!

(b) Wir nehmen an, dass (ii) gilt und setzen $T(t)x = u_x(t)$. Man zeige, dass T eine C_0-Halbgruppe erzeugt.
Hinweis: Um die Beschränktheit von $T(t)$ zu erhalten muss man das Theorem vom abgeschlossenen Graphen benutzen. Die starke Stetigkeit ist klar und das Halbgruppengesetz ist einfach zu beweisen.

(c) Man zeige, dass A der Erzeuger von T in (b) ist.
Hinweis: Es sei B der Erzeuger von T und $\lambda > \omega(T)$ man zeige, dass $R(\lambda, B)X \subset D(A)$ (Laplace-Transformation!) und $(\lambda - A)R(\lambda, B)x = x$ für alle $x \in X$ gilt. Man zeige nun noch, dass $\lambda - A$ injektiv (ist x ein Eigenvektor von A, dann ist $u_x(t) = e^{\lambda t}x$!) ist und folgere daraus die Behauptung.

Aufgabe 4 (*Multiple-Choice*) (10*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es +2 und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) −2 Punkte. Die Gesammtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.
Bemerkung: Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

(a) Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T, dann gilt
☐ $\sigma(T(1)) \supset e^{\sigma(A)}$ ☐ $\sigma_{\mathrm{p}}(T(1))\backslash\{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ ☐ $\sigma(A) = \sigma(A') = \sigma_{\mathrm{ap}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{ap}}(A')$
☐ $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$

(b) Es sei T eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A.
☐ für alle $\lambda > \omega(T)$ existiert $M \geq 1$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\lambda t}$ ☐ $\|T(t)\| \leq Me^{\omega(T)t}$ für ein $M \geq 1$, falls A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt ☐ Es gibt ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda = s(A)$, falls T schließlich normstetig ist.

(c) Es sei T eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A auf einem Banachraum X.
☐ A' erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X' ☐ A' erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X', falls X reflexiv ist. ☐ A' erzeugt eine C_0-Halbgruppe, falls X ein Hilbertraum ist

(d) Es sei $H = \ell^2([0,1])$ und $(e_t)_{t\in[0,1]}$ die kanonische ONB. Weiter sei $f\colon [0,1] \to H$ gegeben durch $f(t) = e_t$ für alle $t \in [0,1]$.
☐ f ist messbar. ☐ $x' \circ f$ ist messbar für alle $x' \in H'$ ☐ f ist Riemann-integrierbar

(e) Es sei T eine C_0-Halbgruppe auf X und es gelte $\|T(\cdot)x\|_{L^p((0,\infty);X)} < \infty$ für alle $x \in X$. Dann gilt
☐ $\omega(T) < 0$, falls $p \in [1,\infty)$ ☐ $\omega(T) < 0$, falls $p = \infty$ ☐ $\omega(T) \leq 0$, falls $p = \infty$