



## Übungsblatt 3 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 5.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

### Aufgabe 1 (*Multiplikationsoperatoren*) (3+4+5+2)

Es sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $p \in [1, \infty)$ . Weiter sei  $m: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  eine messbare Funktion. Wir definieren den Operator

$$M_m := mf$$

mit Definitionsbereich

$$D(M_m) := \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : mf \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\}.$$

- (a) Man zeige, dass  $M_m$  abgeschlossen und dicht-definiert ist und  $M_m$  genau dann ein beschränkter Operator ist, wenn  $m$  wesentlich beschränkt ist.  
(b) Man beweise

$$\sigma(M_m) = \text{essim } m = \left\{x \in \mathbb{R} : \forall r > 0 \text{ ist } m^{-1}(B(x, r)) \text{ keine Nullmenge.}\right\}.$$

- (c) Man zeige, dass falls  $\text{Re } m(x) \leq \omega$  für alle  $x \in \Omega$  bis auf eine Nullmenge für ein  $\omega \in \mathbb{R}$  gilt, dann ist  $M_m$  der Erzeuger der  $C_0$ -Halbgruppe  $(M_{\exp(tm)})_{t \geq 0}$  aus Blatt 1 Aufgabe 3.  
(d) Man zeige analoge Aussagen (man muss die Behauptungen in (a) und (b) leicht abändern) auch für den Fall, dass  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  nicht  $\sigma$ -endlich ist.

### Aufgabe 2 (*Erzeuger der Translationshalbgruppe*) (3+3+5\*+5\*)

Es sei  $T$  die Translationshalbgruppe auf  $L^p(I)$  aus Aufgabe 1 auf Blatt 1 für  $p < \infty$ , d.h. es ist  $(T(t)f)(s) = f(t+s)$  für fast alle  $s \in I$  mit  $t+s \in I$  und  $(T(t)f)(s) = 0$  sonst. Dabei ist  $I = (a, b)$  ein offenes nicht-triviales Intervall.

- (a) Man zeige, dass der Erzeuger der Translationshalbgruppe gegeben ist durch den Abschluss  $\bar{A}$  des Operators  $A: D(A) \rightarrow L^p((a, b))$  mit

$$Af = f'$$

und  $D(A) = C_c^1([a, b])$ , falls  $a > -\infty$  und  $D(A) = C_c^1((a, b))$ , falls  $a = -\infty$ .

- (b) Wir betrachten im Falle von  $b < \infty$  und  $a > -\infty$  den Operator  $B: D(B) \rightarrow X$  mit  $Bf = f'$  und

$$D(B) = \left\{f \in C^1([a, b]) : f'(b) = 0\right\}.$$

Man zeige, dass der Abschluss von  $B$  für  $X = L^p((a, b))$  existiert und  $B$  im Falle  $X = C([a, b])$  abgeschlossen ist.

- (c) Wir betrachten den Operator  $B$  aus Teilaufgabe (b) mit  $X = L^p((a, b))$ . Man zeige, dass  $\bar{B}$  keine  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt.  
(d) Wir betrachten wieder den Operator  $B$  aus Teilaufgabe (b) aber diesmal mit  $X = C([a, b])$ . Man zeige, dass  $B$  eine  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt.