ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 4

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 12.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Direkte Anwendungen von Hille-Yosida*) (5+10*)

In dieser Ausgabe sollen Sie explizit nicht auf Lumer-Phillips zurückgreifen, sondern Hille-Yosida direkt benutzen. Versuchen Sie dabei mit möglichst elementaren Methoden die Voraussetzungen zu überprüfen.

(a) Es sei M_m der Multiplikationsoperator zu einer messbaren Funktion $m\colon \Omega \to \mathbb{K}$ auf $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ (siehe Blatt 3). Dabei sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger σ-endlicher Maßraum. Man zeige durch direkte Anwendung des Hille-Yosida Theorems, dass M_m genau dann eine C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn es $\omega > 0$ und eine Nullmenge $A \in \Sigma$ gibt mit $\operatorname{Re} m(x) < \omega$ für alle $x \in A^c$.
Bemerkung: Wenn man nicht voraussetzt, dass A eine Nullmenge ist, sondern nur die Eigenschaft $\mu(B) \in \{0, \infty\}$ für alle messbaren $B \subset A$ fordert, kann man wieder auf die Voraussetzung σ-endlich verzichten.

(b) Es sei $A\colon D(A) \to C_0(\mathbb{R})$ gegeben durch $Af = f''$. Man zeige, dass A eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ erzeugt, indem man die Voraussetzungen von Hille-Yosida überprüft. Dabei ist

$$D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R}) :\ f, f'' \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Hinweis: Sie werden im Laufe der Aufgabe auf eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\lambda f - f'' = g$$

kommen. Eine Lösungen ist gegeben durch

$$f(t) = e^{-t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{t} \frac{g(s)}{2\sqrt{\lambda}} e^{s\sqrt{\lambda}}\, ds + e^{t\sqrt{\lambda}} \int_{t}^{\infty} \frac{g(s)}{2\sqrt{\lambda}} e^{-s\sqrt{\lambda}}\, ds.$$

Man muss nun zeigen, dass dies die einzige Lösung der obigen DGL mit $f \in D(A)$ ist. Es wird dann klar sein, dass $R(\lambda, A)g = f$ gilt. Mit diesem Ergebnis kann man nun direkt die Voraussetzungen von Hille-Yosida überprüfen.

Aufgabe 2 (*Direkte Anwendung von Lumer-Phillips*) (5+5*)

Zeigen Sie durch Anwendung von Lumer-Phillips, dass die unten definierten Operatoren A (Dirichlet-Laplace auf $(0,1)$) und B (Neumann-Laplace auf $(0,1)$) eine C_0-Halbgruppe erzeugen.

(a) Es sei $A\colon D(A) \to C_0((0,1))$ gegeben durch $Af = f''$. Dabei ist

$$D(A) = \{f \in C^2([0,1]) :\ f, f'' \in C_0((0,1))\}.$$

Hinweis: A ist dicht-definiert. Dass A surjektiv ist, sieht man sehr leicht. Wir müssen also noch zeigen, dass A dissipativ ist. Für $f \in D(A)$ gibt es aber ein $x \in [0,1]$ mit $|f(x)| = \|f\|_\infty$. Man bastle aus x ein Element aus $\operatorname{d} N(f)$, mit dem man die Dissipativität zeigen kann.

(b) Es sei $B\colon D(B) \to C([0,1])$ gegeben durch $Bf = f''$. Dabei ist

$$D(B) = \{f \in C^2([0,1]) :\ f' \in C_0((0,1))\}.$$

Hinweis: B ist offensichtlich dicht-definiert. Die Dissipativität zeigt man wie in (a). Es ist nun zum Beispiel nur noch zu zeigen, dass $1 - B$ surjektiv ist. Dazu sei bemerkt, dass die Lösung von $(1 - B)f = g$ gegeben ist durch

$$f(t) = e^{-t} \int_0^t \frac{g(s)}{2} e^{s}\, ds - e^{t} \int_0^t \frac{g(s)}{2} e^{-s}\, ds + \frac{e^t + e^{-t}}{e - e^{-1}} \left(e^{-1} \int_0^1 \frac{g(s)}{2} e^{s}\, ds + e \int_0^1 \frac{g(s)}{2} e^{-s}\, ds \right).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Tensorprodukt von C_0-Halbgruppen auf $C_0(\Omega)$*) (5*+2*+3*)
Es seien Ω_1, Ω_2 zwei lokal kompakte Hausdorff-Räume. Es sei T_1 eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\Omega_1)$ mit Erzeuger A_1 und T_2 eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\Omega_2)$ mit Erzeuger A_2. Für $f \in C_0(\Omega_1)$ und $g \in C_0(\Omega_2)$ definieren wir $f \otimes g \in C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ über $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und alle $y \in \Omega_2$.

(a) Man zeige, dass es genau eine C_0-Halbgruppe T auf $C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ gibt mit $T(t)(f \otimes g) = (T_1(t)f) \otimes (T_2(t)g)$ für alle $f \in C_0(\Omega_1)$ und $g \in C_0(\Omega_2)$.

(b) Man zeige, dass der Erzeuger von T gegeben ist durch den Abschluss des Operators $A\colon D(A) \to C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit $A(f \otimes g) = (A_1 f) \otimes g + f \otimes (A_2 g)$ und

$$D(A) = \operatorname{span}\{f \otimes g : \ f \in D(A_1), \ g \in D(A_2)\}.$$

(c) Man zeige, dass der Abschluss von $A\colon D(A) \to C_0(\mathbb{R} \times [0,1])$ mit $Af = \Delta f$ und

$$D(A) = \Big\{f \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1]) : \ f, \Delta f \in C_0(\mathbb{R} \times [0,1]) \text{ und } \partial_2 f(\cdot, 0) = \partial_2 f(\cdot, 1) = 0\Big\}$$

eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R} \times [0,1])$ erzeugt. *Bemerkung:* Man kann sich nun sehr leicht viele verschiedene Beispiele von C_0-Halbgruppen aus eindimensionalen zusammenbasteln.

Aufgabe 4 (*Interpretation der Ergebnisse*) (10)
Formulieren Sie die Aussage in Aufgabe 1 (b) und Aufgabe 2 (b) ganz explizit in Aussagen über ein Anfangsrandwertproblem um. Man versuche dabei möglichst nur elementare Begriffe zu verwenden (beispielsweise nicht „die Funktion $f\colon [0, \infty) \to C_0(\mathbb{R})$ ist differenzierbar"- man versuche dies lieber über Eigenschaften von $g(t, x) = f(t)(x)$ auszudrücken.)
Hinweis: Man siehe dazu Blatt 2 Aufgabe 4 und die Bemerkungen dazu in der Lösung.