



## Übungsblatt 5 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 19.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

### Aufgabe 1 (Wiederholung) (10+10\*)

- (a) Es sei  $T$  der Linksshift (Translationshalbgruppe - siehe Blatt 1) auf  $L^p((-\infty, 0))$ . Man zeige, dass der Erzeuger  $A$  von  $T$  gegeben ist durch

$$(f, g) \in G(A) \Leftrightarrow f, g \in L^p((a, b)) \text{ und } f(x) = \int_0^x g(s) ds \text{ für fast alle } x \in (-\infty, 0).$$

Mit anderen Worten ist  $Af = f'$  (im schwachen Sinn) und  $D(A) = W_0^{1,p}((-\infty, 0))$ .

- (b) Beweisen Sie, dass das folgende ARWP wohlgestellt (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $u$  mit entsprechenden klassischen Ableitungen für angegebene  $f$ , sowie, dass  $u$  stetig abhängt von  $f$  gleichmäßig in  $t, y$  für beschränkte Zeiten  $t$ ) ist:

$$\begin{cases} u_t(t, y) = u_{yy}(t, y) + u_y(t, y) & , \text{ für } t \geq 0; y \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & , \text{ für } t \geq 0 \\ u(0, y) = f(y) & , \text{ für } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dabei sei  $f \in C^2([0, 1])$  mit  $f(0) = f(1) = f_{yy}(0) + f_y(0) = f_{yy}(1) + f_y(1) = 0$  für alle  $y \in [0, 1]$ .

### Aufgabe 2 (Strikt konvexe Räume und glatte Räume) (5\*+5)

Ein Banachraum  $X$  heißt **strikt konvex**, falls aus  $\|x\| = 1$  und  $\|y\| = 1$  für  $x \neq y$  bereits  $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  folgt. Mit anderen Worten ist  $X$  strikt konvex, wenn die Einheitskugel strikt konvex ist.

- (a) Es sei  $X'$  strikt konvex, dann ist die Menge  $dN(x)$  für alle  $x \neq 0$  einelementig<sup>1</sup>.  
 (b) Man bestimme  $dN(x)$  für  $x \in L^p(\Omega)$  und  $p \in (1, \infty)$ . Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass  $L^q(\Omega)$  für  $q \in (1, \infty)$  strikt konvex ist.

### Aufgabe 3 (Dichtes Bild und Injektivität der dualen Abbildung) (5\*+5)

Es sei  $A$  ein Operator auf  $X$ . Man zeige folgende Aussagen:

- (a)  $\ker A' = \{0\}$  ist äquivalent dazu, dass  $\text{im}(A)$  dicht in  $X$  ist. Hier sei  $A$  ein dicht-definierter Operator.  
 (b) Man zeige, dass  $A$  genau dann abschließbar ist und der Abschluss von  $A$  eine kontraktive  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt, wenn  $A$  dicht-definiert, dissipativ ist und es ein  $\lambda > 0$  gibt mit  $\ker(\lambda - A') = \{0\}$ .

### Aufgabe 4 (Für Interessierte: Anwendung in der Numerik<sup>2</sup>) (5\*+5\*)

Es sei  $T$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$  mit Generator  $A$ . Ziel ist es  $T(t)x$  für  $x \in X$  numerisch zu berechnen. Dazu nutzen wir die Finite-Differenzen-Methode, also eine stark stetige Funktion  $F: (0, \tau) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  (für ein  $\tau > 0$ ). Wir sagen die Finite-Differenzen-Methode  $F$  ist **konvergent** (gegen  $T$ ), falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(h_k)^{n_k} x = T(t)x$$

<sup>1</sup>Man nennt  $X$  **glatt**, wenn  $dN(x)$  für alle  $x \neq 0$  einelementig ist.

<sup>2</sup>Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.

für alle  $x \in X$  gilt, wann immer  $n_k \rightarrow \infty$  und  $n_k h_k \rightarrow t-$  (für  $k \rightarrow \infty$ ) gilt. Wir sagen die Finite-Differenzen-Methode ist **stabil**, falls für alle  $t > 0$  gilt

$$\|F(h)^n\| \leq M$$

für ein  $M \geq 1$  und alle  $h \in (0, \tau)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $nh \leq t$ .

- (a) Zeigen Sie, dass eine konvergente Finite-Differenzen-Methode bereits stabil ist.  
 (b) Beweisen Sie, dass  $F$  mit ( $r > 0$  ist fest und  $h \geq 0$  so, dass  $2h < 1$ )

$$(F(h^2 r)f)(x) = \begin{cases} f(x) + r[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] & , \text{ für } x-h, x+h \in [0, 1] \\ f(x) + r[0 - 2f(x) + f(2x-1)] & , \text{ für } x+h \notin [0, 1] \\ f(x) + r[f(2x) - 2f(x) + 0] & , \text{ für } x-h \notin [0, 1] \end{cases}$$

für  $x \in (0, 1)$  konsistent ist für die von  $Af = f''$  mit

$$D(A) = \left\{ f \in C^2([0, 1]) : f, f'' \in C_0((0, 1)) \right\}$$

erzeugte  $C_0$ -Halbgruppe  $T$  auf  $C_0((0, 1))$ . Man zeige weiter, dass  $F$  stabil und konvergent ist, wenn  $r \leq 1/2$  gilt. Sie dürfen benutzen:

Der **Äquivalenzsatz von Lax**<sup>3</sup> besagt, dass eine konsistente<sup>4</sup> Finite-Differenzen-Methode  $F$  für  $T$  genau dann konvergiert, wenn diese stabil ist.

---

<sup>3</sup>Diesen Satz beweisen wir später entweder in der Übung oder in der Vorlesung.

<sup>4</sup>Die genaue Definition von Konsistenz geben wir später. Fürs Erste reicht es zu wissen, dass  $F$  konsistent ist, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(h)x - x}{h} = Ax$$

für alle  $x \in D(A)$  gilt.