ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 6

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 26.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Wohlgestelltheit in der Supremumsnorm*) (10+5*+5*+5)
Welche der folgenden Probleme sind wohlgestellt (eventuell abhängig vom angegebenen Parameter)[1]?

(a) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f'(0) = f'(1) = 0$. Das ARWP sei (für feste $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \alpha u_{xx}(t,x) + \beta u_x(t,x) + \gamma u(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0 & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

(b) Es sei $f \in C^2([0,1]^2)$ mit $f(x,0) = f(x,1) = f_{xx}(x,0) + f_{yy}(x,0) + f_y(x,0) = f_{xx}(x,1) + f_{yy}(x,1) + f_y(x,1) = 0$ und $f_x(0,y) = f_x(1,y) = 0$ für alle $x, y \in [0,1]$. Das zu betrachtende ARWP ist

$$\begin{cases} u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) + u_y(t,x,y) & \text{, für } t \geq 0;\ x,y \in [0,1]^2 \\ u_x(t,0,y) = u_x(t,1,y) = 0 & \text{, für } t \geq 0;\ y \in [0,1]^2 \\ u(t,x,0) = u(t,x,1) = 0 & \text{, für } t \geq 0;\ y \in [0,1]^2 \\ u(0,x,y) = f(x,y) & \text{, für } x,y \in [0,1]^2. \end{cases}$$

(c) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und $f''(0) = f''(1)$. Das ARWP sei

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

(d) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$ und $f''(0) = f''(1)$. Das ARWP sei diesmal aber

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (*Invarianz von konvexen abgeschlossenen Mengen*) (5*+5+10*)
Es sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A und es gelte

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Weiter bezeichne $C \subset X$ eine abgeschlossene konvexe Menge.

[1] Mit Wohlgestellt meinen wir hier, dass es eine eindeutige Lösung gibt, derart, dass alle Ableitungen, die im der Problemstellung auftauchen, klassisch existieren, stetig sind (inklusive $t = 0$) und die im Problem angegebenen Identitäten stimmen. Weiterhin soll die Lösung gleichmäßig vom Anfangswert abhängen!

Bitte wenden!

(a) Falls $T(t)C \subset C$ für alle $t \geq 0$ gilt, so gilt auch $\lambda R(\lambda, A)C \subset C$ für alle $\lambda > \max\{0, \omega\}$ gilt.
(b) Es gelte $\lambda R(\lambda, A)C \subset C$ für alle $\lambda > 0$ groß genug. Man zeige, dass dann auch $T(t)C \subset C$ für alle $t \geq 0$ gilt.
(c) Auf Blatt 4 Aufgabe 2 (a) haben wir gezeigt, dass $Af = f''$ mit $D(A) = \{f \in C^2([0,1]) : \ f, f'' \in C_0((0,1))\}$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe T erzeugt. Man beweise, dass $(T(t)f)(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Anwendung in der Numerik II*[2]) (5*+5*)
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 4 auf Blatt 5. Für die Notationen (insbesondere Konvergenz und Stabilität) sei auf dieses Blatt verwiesen. Sie dürfen in dieser Aufgabe wieder den Äquivalenzsatz von Lax benutzen.

(a) Finden Sie eine stabile Finite-Differenzen-Methode welche gegen die von $Af = f''$ mit $D(A) = \{f \in C^2([0,1]) : \ f' \in C_0((0,1))\}$ erzeugte C_0-Halbgruppe konvergiert.
(b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen gefundene Methode in der Tat stabil und konvergent ist.

[2] Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.