ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 6

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 26.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Wohlgestelltheit in der Supremumsnorm*) (10+5*+5*+5)
Welche der folgenden Probleme sind wohlgestellt (eventuell abhängig vom angegebenen Parameter)[1]?

(a) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f'(0) = f'(1) = 0$. Das ARWP sei (für feste $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \alpha u_{xx}(t,x) + \beta u_x(t,x) + \gamma u(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0 & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum es reicht $\alpha \in \{1, -1\}$ und $\gamma = 0$ zu betrachten. Im Falle $\alpha > 0$ und ist das ARWP wohlgestellt (Hier können Sie Lumer-Phillips benutzen). Ansonsten ist dies nicht der Fall (Betrachen Sie hier das Spektrum des Operators).

(b) Es sei $f \in C^2([0,1]^2)$ mit $f(x,0) = f(x,1) = f_{xx}(x,0) + f_{yy}(x,0) + f_y(x,0) = f_{xx}(x,1) + f_{yy}(x,1) + f_y(x,1) = 0$ und $f_x(0,y) = f_x(1,y) = 0$ für alle $x, y \in [0,1]$. Das zu betrachtende ARWP ist

$$\begin{cases} u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) + u_y(t,x,y) & \text{, für } t \geq 0;\ x, y \in [0,1]^2 \\ u_x(t,0,y) = u_x(t,1,y) = 0 & \text{, für } t \geq 0;\ y \in [0,1]^2 \\ u(t,x,0) = u(t,x,1) = 0 & \text{, für } t \geq 0;\ y \in [0,1]^2 \\ u(0,x,y) = f(x,y) & \text{, für } x, y \in [0,1]^2. \end{cases}$$

Hinweis: Dies ist ein Tensorpodukt von ihnen schon bekannten Halbgruppen. Sie können aber auch Lumer-Phillips auf das Problem anwenden.

(c) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und $f''(0) = f''(1)$. Das ARWP sei

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Hinweis: Bearbeiten Sie zuerst die nächste Teilaufgabe! Hier wurde nur der Definitionsbereich des Operators im nächsten Teil vergrößert. Deshalb kann nur einer von beiden eine C_0-Halbgruppe erzeugen.

(d) Es sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$ und $f''(0) = f''(1)$. Das ARWP sei diesmal aber

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & \text{, für } t \geq 0;\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{, für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

[1] Mit Wohlgestellt meinen wir hier, dass es eine eindeutige Lösung gibt, derart, dass alle Ableitungen, die im der Problemstellung auftauchen, klassisch existieren, stetig sind (inklusive $t = 0$) und die im Problem angegebenen Identitäten stimmen. Weiterhin soll die Lösung gleichmäßig vom Anfangswert abhängen!

Bitte wenden!

Hinweis: Betrachen Sie den Operator $Af = f''$ mit Definitonsbereich

$$D(A) = \{f \in C^2([0,1]) :\ f(0) = f(1),\ f'(0) = f'(1) \text{ und } f''(0) = f''(1)\}$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen f auf $[0,1]$ mit $f(0) = f(1)$.

Aufgabe 2 (*Invarianz von konvexen abgeschlossenen Mengen*) (5*+5+10*)

Es sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A und es gelte

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Weiter bezeichne $C \subset X$ eine abgeschlossene konvexe Menge.

(a) Falls $T(t)C \subset C$ für alle $t \geq 0$ gilt, so gilt auch $\lambda R(\lambda, A)C \subset C$ für alle $\lambda > \max\{0, \omega\}$ gilt.
Hinweis: Man benutze die Darstellung von $R(\lambda, A)x$ als ein uneigenliches Riemann-Integral von $T(\cdot)x$ und benutze die Bemerkung zu Aufgabe 2 auf Blatt 2.

(b) Es gelte $\lambda R(\lambda, A)C \subset C$ für alle $\lambda > 0$ groß genug. Man zeige, dass dann auch $T(t)C \subset C$ für alle $t \geq 0$ gilt.
Hinweis: Man benutze die Hille-Approximation der C_0-Halbgruppe. Damit ist die Aussage einfach zu beweisen (es reicht sogar, dass C nur abgeschlossen ist; konvex wird hier garnicht benötigt).

(c) Auf Blatt 4 Aufgabe 2 (a) haben wir gezeigt, dass $Af = f''$ mit $D(A) = \{f \in C^2([0,1]) :\ f, f'' \in C_0((0,1))\}$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe T erzeugt. Man beweise, dass $(T(t)f)(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Resolventen die konvexe abgeschlossene Menge $C = \{f \in C_0((0,1)) :\ f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$ invariant lassen. Dazu müssen Sie die Resolventen nicht berechnen.

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Anwendung in der Numerik II*[2]) (5*+5*)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 4 auf Blatt 5. Für die Notationen (insbesondere Konvergenz und Stabilität) sei auf dieses Blatt verwiesen. Sie dürfen in dieser Aufgabe wieder den Äquivalenzsatz von Lax benutzen.

(a) Finden Sie eine stabile Finite-Differenzen-Methode welche gegen die von $Af = f''$ mit $D(A) = \{f \in C^2([0,1]) :\ f' \in C_0((0,1))\}$ erzeugte C_0-Halbgruppe konvergiert.
Hinweis: Sie können zum Beispiel die Methode aus Blatt 5 für den Dirichlet-Operator an den Grenzbereichen abändern.

(b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen gefundene Methode in der Tat stabil und konvergent ist.

[2] Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.