



Übungsblatt 9 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 17.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Beispiel und Nicht-Beispiel holomorpher C_0 -Halbgruppen*) (5+10)

- (a) Es sei $X = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ mit $D(A) = H^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und $Af = f'$ für $f \in D(A)$ gegeben. Man zeige, dass A keine holomorphe C_0 -Halbgruppe erzeugen kann.
- (b) Es sei $X = L^2((0, 1); \mathbb{C})$ mit $D(A) = \{f \in H^2((0, 1); \mathbb{C}) \cap H_0^1((0, 1); \mathbb{C})\}$ und $Af = f'' + f'$ für $f \in D(A)$. Man zeige, dass A eine holomorphe C_0 -Halbgruppe erzeugt. Man bestimme weiter den maximalen Winkel des Sektors auf dem die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe holomorph fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 2 (*Wohlgestelltheit von holomorphen C_0 -Halbgruppen*) (5*+5)

- (a) Es sei T eine holomorphe C_0 -Halbgruppe auf X mit Erzeuger A . Man zeige, dass $T(t)X \subset D(A)$ für alle $t > 0$ gilt und es für jedes $x \in X$ genau eine stetige Funktion $u: [0, \infty) \rightarrow X$ gibt mit $u|_{(0, \infty)} \in C((0, \infty), D(A)) \cap C^1((0, \infty), X)$, $\dot{u}(t) = Au(t)$ für $t > 0$, und $u(0) = x$. Man zeige weiter, dass u stetig von x abhängt und $u|_{(0, \infty)} \in C^\infty((0, \infty), D(A^n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (b) Was können Sie mit den Aussagen der vorigen Teilaufgabe über das Problem

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + u_x(t, x) & t > 0 \text{ und } x \in [0, 1] \\ u(t, 1) = u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{für fast alle } x \in [0, 1] \end{cases}$$

aussagen? Dabei ist $f \in L^2((0, 1))$. Verwenden Sie dabei möglichst die klassischen Ableitungsbegriffe in endlich-dimensionalen Räumen.

Aufgabe 3 (*Für Interessierte: Eine einfache Schrödingergleichung II*) (10*+10*+10*)

Es sei $A: D(A) \rightarrow C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ mit $D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : f, f'' \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})\}$ und $Af = if''$ gegeben. Ziel wird es sein zu zeigen, dass A nichtmal eine C_0 -Halbgruppe erzeugt. Es sei B mit $D(B) = H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und $Bf = if''$. Auf Blatt 8 Aufgabe 2 (b) haben wir gezeigt, dass B eine C_0 -Halbgruppe S auf $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ erzeugt.

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 3 auf Blatt 8.

- (a) Finden Sie Funktionen $f_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ mit $\|S(1)f_n\|_\infty \geq n\|f_n\|_\infty$.
- (b) Folgern Sie, dass A keine C_0 -Halbgruppe erzeugt.
- (c) Geben Sie eine Skizze der gesamten Argumentation (wie hat man $S(t)g_{x,p}$ berechnet,...) und interpretieren Sie Ihre Wahl von f_n physikalisch.