ulm university universität ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 13

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **27.1.2016** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Diagonalierbarkeit und Diagonalisierung I*) (10+10)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls eine Basis aus Eigenvektoren. Fassen Sie die Matrix dabei einmal als reelle Matrix und einmal als komplexe Matrix auf.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Welche der folgenden linearen Abbildungen sind diagonalisierbar? Man berechne gegebenenfalls eine Basis aus Eigenvektoren vom entsprechenden Vektorraum.

$$f\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}),\ f\colon p \mapsto p'$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$g\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ g\colon A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

Übungsaufgabe 2 (10+10*)

(a) Es sei $f\colon V \to V$ linear und V endlich-dimensional. Geben Sie eine Definition des charakteristischen Polynoms p_f von f (beweisen Sie die Wohldefiniertheit, falls nötig) und zeigen Sie

$$p_f = p_{A(f)}$$

sowie $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Nullstelle von p_f genau dann, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

(b) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ für $n \geq m$. Man zeige $p_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^{n-m} p_{BA}(\lambda)$.

Übungsaufgabe 3 (*Eine zweite Anwendung von Eigenwerten und Eigenvektoren*) (2+3+5)

Die erste Anwendung ist der PageRank (siehe Blatt 6 Übungsaufgabe 2) wegen $B\omega = \omega$ für $B = (b_{ij})$ und $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösungsmenge der PageRank-Gleichung nichts anderes als $\mathrm{Eig}(B, 1)$. Die Anwendungen von Eigenvektoren, Eigenwerten und Diagonalisierung sind zahlreich. Wir geben nun eine weitere Anwendung und zwar ein Verfahren geschlossene Formeln für gewisse Rekursionsgleichungen zu finden. Wir machen dies am Beispiel der **Fibonacci-Folge**. Es sei $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Wir definieren die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Finden Sie eine Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bitte wenden!

(b) Wie kann man mit Hilfe von A^n den Wert f_{n+1} berechnen? Man beweise die aufgestellte Behauptung.

(c) Diagonalisieren Sie A und berechnen Sie mit Hilfe der Diagonalisierung f_{n+1} für $n \in \mathbb{N}_0$.

Tutoriumsaufgabe 1 (*Diagonalierbarkeit und Diagonalisierung II*) (0)

Welche der folgenden Matrizen A_i sind diagonalisierbar ($i = 1, 2, 3$)? Berechnen Sie gegebenenfalls $T \in \mathrm{GL}(n)$ mit $T^{-1}A_iT$ ist eine Diagonalmatrix. Fassen Sie die Matrix dabei einmal als reelle Matrix und einmal als komplexe Matrix auf.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (*Matrixpotenzen berechnen*) (0)

(a) Es seien A, B zwei ähnliche Matrizen, d.h. $A = SBS^{-1}$ für ein $S \in \mathrm{GL}(n)$. Man zeige $A^n = SB^nS^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Berechnen Sie A_1^n für die Matrix in Tutoriumsaufgabe 1 in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.